

# **Anwendungen von Konzepten grosser Abweichungen auf Fragestellungen der Einkommensdynamik**

**Peter Steiner**

Inauguraldissertation zur Erlangung der Würde eines  
DOCTOR RERUM OECONOMICARUM  
der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Bern

Die Fakultät hat diese Arbeit am 23. Oktober 2003 auf Antrag der beiden Gutachter Prof. Dr. Klaus Neusser und Prof. Dr. Robert E. Leu als Dissertation angenommen, ohne damit zu den ausgesprochenen Auffassungen Stellung nehmen zu wollen.

Diese Dissertation ist als Buch (ISBN 3-89825-887-4) bei

dissertation.de - Verlag im Internet GmbH

Pestalozzistraße 9

10 625 Berlin

<http://www.dissertation.de>

erschienen und kann dort auch bezogen werden.

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Klaus Neusser und auch Prof. Dr. Robert Aebi für die intensive wissenschaftliche Zusammenarbeit während der letzten Jahre. Zudem möchte ich mich bei Prof. Dr. Robert E. Leu dafür bedanken, dass er sich als Zweitgutachter zur Verfügung gestellt hat. Spezieller Dank gebührt auch Sandra Schlick für die Korrekturlesung des theoretischen Teils dieser Arbeit und Prof. Gabriele Camera für den Gedankenaustausch an der ESEM-Tagung 2001 in Lausanne.

Bern, im Juli 2003

Peter Steiner



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>EINFÜHRUNG UND MOTIVATION</b>	<b>1</b>
	<b>I THEORETISCHER TEIL</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>OPTIMAL ANGEPASSTE EINKOMMENDYNAMIKEN</b>	<b>9</b>
2.1	Einleitung	9
2.2	Grundlagen	12
2.3	Ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell	17
2.3.1	Wahrscheinlichkeiten von Einkommensgeschichtematrizen	22
2.3.2	Minimierungsproblem und optimal adjustierte Dynamik	23
2.3.3	Iterativ proportionale Anpassungsprozedur (IPFP)	31
2.4	Wahl der bestmöglichen hypothetischen Dichtematrix	33
2.5	Statistische Schlüsse	36
2.6	Schlussbetrachtungen	37
<b>3</b>	<b>MESSUNG DER MOBILITÄT</b>	<b>39</b>
3.1	Einleitung	39
3.2	Mobilität von Markovketten	43
3.2.1	Masse der Generationenabhängigkeit	44
3.2.2	Masse der Bewegung	44
3.2.3	Zusammenfassende Bemerkungen	45
3.3	Gleichgewichtsindex und Eigenschaften	46
3.3.1	Voraussetzungen, Gleichgewichts- und Konvergenzindices	46
3.3.2	Definition der Gleichgewichtsmobilität	49
3.3.3	Empirische Mobilität	53
3.3.4	Verbindungen zu in der Literatur verankerten Konzepten	54
3.4	Grosse Abweichungen von Mobilitätsfunktionalen	58
3.4.1	Die Perron-Frobenius Transformation	60
3.4.2	Maximal erreichbare empirische Mobilität	63
3.4.3	Das Prinzip der grossen Abweichungen	65
3.5	Periodenmobilität und Beispiele	68
3.5.1	Periodenmobilitätsindex	68
3.5.2	Beispiele	72
3.6	Schlussbetrachtungen	79
	<b>II EMPIRISCHER TEIL</b>	<b>83</b>
<b>4</b>	<b>DIE DATENSÄTZE</b>	<b>85</b>
4.1	Current Population Survey (Burkhauser-Daten)	85
4.2	Panel Study of Income Dynamics	86
<b>5</b>	<b>BESSERE ÜBERGANGSDYNAMIKEN DURCH EINBEZUG VON QUERSCHNITTSDATEN</b>	<b>89</b>
5.1	Einleitung	89
5.2	Empirische Resultate	91
5.2.1	PSID-Hypothese	93
5.2.2	Prognosen	98
5.3	Schlussbetrachtungen und Ausblick	99
<b>6</b>	<b>ANPASSUNG VON THEORIEN DER EINKOMMENDYNAMIK AN QUERSCHNITTSDATEN</b>	<b>103</b>
6.1	Einleitung	103
6.2	Empirische Resultate	104
6.2.1	Hypothese maximaler Mobilität	106
6.2.2	3-Band-Hypothese	110
6.2.3	AR(1)-Hypothese	113
6.2.4	Prognosen	117
6.3	Schlussbetrachtungen	119

<b>7</b>	<b>VERGLEICH DER EINKOMMENDYNAMIKEN VON FRAUEN UND MÄNNERN</b>	<b>121</b>
7.1	Einleitung	121
7.2	Die Datenlage	122
7.3	Empirische Resultate	124
7.3.1	Erste Hypothese	124
7.3.2	Zweite Hypothese	127
7.3.3	Vergleich der Hypothesen mit der "wahren" Dynamik	129
7.4	Schlussfolgerungen	135
<b>8</b>	<b>MONTE CARLO SIMULATION</b>	<b>137</b>
8.1	Einleitung	137
8.2	Wahre Einkommensdynamik und simulierte Stichproben	138
8.2.1	Die wahre Dynamik	138
8.2.2	Die Stichproben	139
8.3	Anpassung der Hypothesen an die Randverteilungen	140
8.3.1	Hypothetische und optimal angepasste Dynamiken	140
8.3.2	Vergleiche mit der wahren Dynamik	145
8.4	Messung der Mobilität	147
8.4.1	Gleichgewichtsindices der Übergangsdynamiken	148
8.4.2	Empirische Stichprobenmobilität	154
8.4.3	Implizite Periodenmobilität	164
8.5	Schlussbemerkungen	172

### III ANHANG UND REFERENZEN 177

<b>9</b>	<b>ANHANG</b>	<b>179</b>
9.1	Erläuterungen zum Konzept der relativen Entropie	179
9.1.1	Einleitung	179
9.1.2	Beweise und Herleitungen	180
9.1.3	Illustration	183
9.1.4	Grosse Abweichungen anhand von Münzwürfen	197
9.2	Ergänzungen zur Mobilitätsmessung	200
9.2.1	Einleitung	200
9.2.2	Beweise und Herleitungen	200
9.2.3	Übersicht über die Bedeutungen der Periodenmobilität	219
9.2.4	Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung	220
9.2.5	Maximal und minimal erreichbare Mobilität	221
9.2.6	Resultate aller erwähnten Mobilitätsfunktionale	227
9.3	Ergänzungen zum empirischen Teil	240
9.3.1	Die Variablen des PSID-Datensatzes	240
9.3.2	Anpassen der Einkommensgrenzen an die Daten und das AR(1)-Modell	250
9.3.3	Definitionen der Ungleichheitsmasse	256
9.3.4	Perfekt mobile Hypothesen und zugehörige Schrödingermultiplikatoren	256
9.4	Einkommensvergleich Männer / Frauen in 5-Jahresperioden	258
9.4.1	Einleitung	258
9.4.2	Die Datenlage	259
9.4.3	Die Periode 1987 bis 1992	260
9.4.4	Die restlichen 5-Jahresperioden	270
<b>10</b>	<b>GLOSSAR</b>	<b>279</b>
10.1	Bezeichnungen	279
10.2	Konventionen	281
10.3	Abkürzungen	282
<b>11</b>	<b>REFERENZEN</b>	<b>283</b>

## 1 EINFÜHRUNG UND MOTIVATION

Um das in jüngster Vergangenheit wiederum gestiegene Interesse an Fragen zur Einkommensverteilung verständlich zu machen gilt es, die Geschichte der Entwicklung der Einkommensverteilung in den USA ein bisschen genauer zu betrachten. So stellt Gottschalk (1997) fest, dass während der 50'er und 60'er Jahre des vergangenen Jahrhunderts temporäre Anstiege der Armut während Rezessionen durch Armutsabnahmen in Zeiten guter Konjunkturlage mehr als wettgemacht wurden. Solange die Armen zusammen mit allen anderen Gesellschaftsschichten vom Wirtschaftswachstum profitierten herrschte Zuversicht, dass die Armutsrate immer tiefer sinken würde. So fiel sie in den USA von 22.4 % (1959) auf 11.1 % (1973).

Während der darauffolgenden zwei Jahrzehnte stieg die Armutsrate während Rezessionen und fiel während Zeiten wirtschaftlicher Expansion wie gehabt. Jedoch reichte die Abnahme während guter Konjunkturlage nicht mehr aus, um den Anstieg in Rezessionszeiten wettzumachen. Dies hatte zur Folge, dass die Armutsrate von 11.1 % (1973) wieder auf 14.5 % (1994) stieg, obwohl das pro-Kopf-Einkommen in dieser Zeitspanne um 27 % zunahm. Die Koexistenz steigender Armut und steigender mittlerer Einkommen indiziert, dass der armutsreduzierende Effekt des Wachstums im pro-Kopf-Einkommen durch eine Zunahme der Ungleichheit mehr als zunichte gemacht wurde. Dieser seit den 70'er Jahren in den USA feststellbare Trend zu vermehrter Ungleichheit in der Einkommensverteilung, welcher auch in anderen Staaten beobachtet werden kann, liess das Interesse an Fragestellungen zu Einkommensverteilung und Einkommensdynamik neu aufleben.

Bei Analysen des Einkommensprozesses ist nicht bloss die Momentaufnahme einer Verteilung der Einkommen von Interesse, auch die Chancen der Individuen auf Veränderung der gegenwärtigen Einkommenssituation sollten dabei berücksichtigt werden. Mit anderen Worten ausgedrückt bedeutet dies, dass auch die Dynamik des Einkommensprozesses in Betracht gezogen werden sollte. Als Illustration soll hier ein Vergleich zweier Gesellschaften A und B dienen, welche sich beide in ihrem Gleichgewicht befinden und dieselbe Verteilung der Einkommen aufweisen. Da beide Ökonomien im Gleichgewicht sind, ändert sich diese Verteilung im Zeitablauf nicht mehr. Für reine Einkommensverteilungsvergleiche ist es egal, wer sich wo in der

Verteilung befindet. Auch liefern solche Vergleiche keine Information darüber, ob und wie stark die Individuen ihre Klassenzugehörigkeit im Zeitablauf ändern. Deshalb sind die beiden Gesellschaften bei einfachen Vergleichen ihrer Einkommensverteilung nicht voneinander zu unterscheiden. Für die individuellen Lebenseinkommen ist es hingegen zentral, ob die Individuen in der Verteilung fest in ihren Einkommensklassen verharren oder ob die Klassen im Zeitablauf gewechselt werden. Falls in der Gesellschaft A nur geringe Mobilität zwischen den Klassen stattfindet, die Einkommensmobilität in Ökonomie B jedoch gross ist, sind die beiden Volkswirtschaften trotz identischer Momentaufnahme unterschiedlich in ihrer dynamischen Entwicklung. Wird aus Gründen der sozialen Stabilität eine ausgeglichene Verteilung angestrebt, so ist die Gesellschaft B als erstrebenswerterer Zustand zu bezeichnen, da hier die Lebenseinkommen, wegen der erhöhten Einkommensmobilität, gleichmässiger verteilt sind als in Volkswirtschaft A.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass Analysen über die Ungleichheit der Wohlfahrt neben Betrachtungen der Einkommensverteilung auch die Dynamik des Einkommensprozesses berücksichtigen sollten. Die Berücksichtigung des Aspekts der Dynamik stellt die Empirie jedoch öfters vor grössere, teils auch unlösbare Probleme. Zum einen sind dazu longitudinale Daten notwendig. Solche Paneldaten<sup>1</sup> sind jedoch für die meisten Länder nicht vorhanden, so dass in solchen Staaten keine Analysen der Dynamik des Einkommensprozesses vorgenommen werden können. Zudem altert ein Datenpanel im selben Umfang wie die betrachtete Zeitperiode. Bei kürzeren Zeitperioden spielt es weniger eine Rolle, dass die betrachtete Population zum Ausgangszeitpunkt entsprechend jünger war als zum Endzeitpunkt. Wird hingegen die Dynamik über einen längeren Zeitraum wie zum Beispiel 10 Jahre analysiert, dann spielt diese Alterung eine wichtige Rolle. Alle Individuen einer solchen Analyse sind dann im Endzeitpunkt 10 Jahre älter als zu Beginn der Betrachtungsperiode. Da sich die Einkommenssituation im Durchschnitt mit zunehmendem Alter verbessert, stellt dies eine enorme Verzerrung dar und kann nur durch Anwendung entsprechender

---

<sup>1</sup> In Datenpanels werden dieselben Daten über dieselben Individuen in regelmässigen Abständen immer wieder erhoben. Somit resultiert für jedes Individuum eine Zeitreihe, welche z.B. die zeitliche Einkommensentwicklung der Panelmitglieder widerspiegelt.



Gewichte einigermaßen ausgeglichen werden. Die Repräsentativität einer solchen Stichprobe für die Gesamtpopulation ist also zumindest zweifelhaft. Zudem führen längere Betrachtungshorizonte auch zu einer erheblichen Ausdünnung des Datenpanels, da bei längeren Zeithorizonten nur für einen kleineren Teil der Individuen des Panels Einkommensangaben für den Anfangs- und den Endzeitpunkt existieren. Wegen dieser Ausdünnung muss oft die Anzahl Einkommensklassen reduziert werden, um noch sinnvolle Übergangsmatrizen schätzen zu können.<sup>2</sup> Auch existieren in gewissen Ländern aus Kostengründen oder wegen ihrer Kleinheit bloss rotierende Panels. In der Schweiz ist dies bei der Schweizerischen Arbeitskräfteerhebung (SAKE) gegeben, bei der ein Erhebungsjahrgang fünf Jahre lang im Panel verbleibt. Hier wäre der maximale Zeithorizont bei der Analyse der Einkommensdynamik mit fünf Jahren vorgegeben und die Grösse der Stichprobe beträgt, ohne sonstige Ausfälle, bloss noch 1/5 des gesamten Panelumfangs. Ausserdem beinhalten Datenpanels, quasi naturgegeben, auch über kleinere Zeiträume relativ kleine Umfänge. Dies erhöht natürlich die Möglichkeit, dass die untersuchte Population für die Gesamtbevölkerung eines Staates nicht gerade repräsentativ ist.

In dieser Arbeit wird nun ein Ansatz vorgestellt, wie diese Probleme angegangen werden können. Es wird aufgezeigt, wie sich die Qualität von aus Paneldaten geschätzten Einkommensdynamiken durch den Einbezug von umfangreichen Querschnittsdaten verbessern lässt, da letztere die Einkommensverteilung der Gesamtpopulation präziser abbilden als Datenpanels.<sup>3</sup> Zusätzlich werden Wege vorgeschla-

---

<sup>2</sup> Übergangsmatrizen (-dynamiken) enthalten in den Zeilen die auf die Einkommensklassenzugehörigkeit im Startjahr bedingten Wahrscheinlichkeiten, im Endjahr in einer bestimmten Klasse zu sein. Eine Unterteilung in mehr Einkommensklassen ermöglicht eine präzisere Beschreibung der Dynamik. Nimmt hingegen die Anzahl der Individuen ab, so erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass gewissen Übergängen die Wahrscheinlichkeit 0 zugeordnet wird, auch wenn dies nicht der Realität entsprechen sollte. Eine Reduktion der Einkommensklassen kann hier wieder sinnvollere Übergangsdynamiken liefern.

<sup>3</sup> Einkommensquerschnitte beinhalten meist wesentlich grössere Populationen als Paneldaten und sind deshalb im allgemeinen repräsentativer für die Gesamtpopulation. Im Gegensatz zu Panels beinhalten Querschnittsdaten jedoch keinerlei Information über die zeitliche Entwicklung der Einkommensklassenzugehörigkeiten der Individuen.

gen, wie sich auch bei Abwesenheit von Paneldaten Erkenntnisse über den dynamischen Einkommensprozess gewinnen lassen. Hierzu müssen theoretische Modellvorstellungen über die Einkommensdynamik erarbeitet und an beobachtete Querschnittsverteilungen angepasst werden. Die dabei verwendete Anpassungsprozedur wird im folgenden *Methode der Minimierung der relativen Entropie* genannt. Die so geschätzten Einkommensdynamiken erlauben dann die Berechnung von Massen, welche Aussagen über die Einkommensmobilität in einer Gesellschaft ermöglichen.

Die Bewertung dieser Mobilität geschieht normalerweise durch sogenannte Mobilitätsindices. In dieser Arbeit wird nun zunächst ein vertieftes Verständnis dafür erarbeitet, was für Mobilitätsaspekte verschiedene Indexmasse überhaupt messen. Es wird gezeigt, dass konventionelle Indices in zwei Klassen eingeteilt werden können. Indices der einen Klasse messen die Mobilität welche vorherrscht, wenn sich eine Gesellschaft in ihrem Gleichgewicht befindet. Solche Indices werden dann als Gleichgewichtsindices bezeichnet. Die Indices der zweiten Klasse werden Konvergenzindices genannt. Dies deshalb, weil sie die Mobilität messen, welche mit der Konvergenz einer Ökonomie hin zum Gleichgewichtszustand einhergeht. Es wird postuliert, bei Analysen der Mobilität diese beiden Aspekte auch auszuweisen und entsprechend zu deklarieren. Um mögliche Willkür zu reduzieren, welche bei der Messung beider Mobilitätsaspekte durch arbiträr zusammengestellte Indexpaare entstehen kann, wird ein Indexpaar vorgestellt, welches beide Aspekte simultan misst. Die Teilindices sind eng miteinander verbunden und nicht unabhängig voneinander kombinierbar. Die Wahl des einen bedingt den anderen, somit wird die Anzahl Kombinationen von Indices beider Klassen vermindert und damit diese Art der Willkür eliminiert.

Im theoretischen Teil dieser Arbeit, den folgenden zwei Kapiteln, werden die notwendigen Grundlagen zur Anpassung von Übergangsdynamiken an beobachtete Querschnittsverteilungen sowie zur Messung beider Aspekte der Mobilität erarbeitet. Im empirischen Teil werden zunächst in Kapitel 4 die verwendeten Datensätze vorgestellt und danach die theoretischen Erkenntnisse in den Kapiteln 5 bis 7 auf konkrete Beispiele der Praxis angewandt. So wird in Kapitel 5 aufgezeigt, wie die Qualität von aus Paneldaten extrahierten Übergangsmatrizen durch den Einbezug von Querschnittsdaten verbessert werden kann. In Kapitel 6 werden theoretische Modelle zur

Erklärung des Abbaus der Mittelklasse und des damit verbundenen Anstiegs der Ungleichheit optimiert. Hier wird gezeigt, wie auch bei Abwesenheit von Paneldaten Erkenntnisse über die Einkommensdynamik gewonnen werden können. Kapitel 7 untersucht dann die Fragestellung, ob sich die Einkommensdynamik der Frauen durch diejenige der Männer genügend genau erklären lässt. Aufbauend auf realistischen Annahmen wird dann in Kapitel 8, mittels einer Monte Carlo Simulationsstudie, die Effizienz der Methode der Minimierung der relativen Entropie bei der Anpassung hypothetischer Dynamiken an beobachtete Einkommensverteilungen der Grundgesamtheit demonstriert. Zudem wird aufgezeigt, wie sich Gleichgewichtsindices direkt aus den individuellen Einkommensverläufen einer Stichprobe schätzen lassen, ohne dass in einem vorangehenden Schritt eine Übergangsmatrix geschätzt zu werden braucht.

Im Anhang in Kapitel 9 werden unter anderem Herleitungen und Beweise zum theoretischen Teil gezeigt. Zudem finden sich hier auch einige vereinfacht dargestellte Grundlagen, vertiefte Diskussionen der Mobilitätsaspekte wie auch ein leichter verständliches Beispiel zur Methode der Minimierung der relativen Entropie sowie der zu ihrer Herleitung benötigten *Theorie grosser Abweichungen*, welches dazu gedacht ist, den Einstieg in die Materie soweit möglich zu erleichtern.



# **I THEORETISCHER TEIL**



## 2 OPTIMAL ANGEPASSTE EINKOMMENSODYNAMIKEN<sup>4</sup>

### 2.1 EINLEITUNG

In diesem Kapitel wird ein statistischer Rahmen für die Evaluation und das Testen von Hypothesen über die zeitliche Entwicklung einer Verteilung, z.B. einer Einkommensverteilung, erarbeitet. Der verwendete Ansatz basiert auf dem Konzept der relativen Entropie (auch Kullback-Leibler Informationskriterium; Kullback 1959) als einem Mass der Distanz zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen.<sup>5</sup> Im Gegensatz zu anderen ähnlichen Applikationen wird dieser Ansatz durch ein explizites wahrscheinlichkeitstheoretisches Mikromodell gerechtfertigt, wie dies Aebi (1996, 1997) in einem anderen Zusammenhang vorschlug. Diese Rechtfertigung basiert auf der Fundamentalthypothese der statistischen Mechanik und auf einem Argument über grosse Abweichungen. Wie aufgezeigt werden wird, liefert dieser Ansatz auch eine statistische Basis zum Testen von Hypothesen.

Es soll das folgende Problem analysiert werden. Ausgangspunkt sei eine Situation, in der die Einkommensverteilung zu zwei Zeitpunkten beobachtet wird, jedoch keine zusätzliche Information darüber vorhanden ist, welches Individuum was für ein Einkommen erzielte. Es liegt folglich eine wiederholte Querschnittsbeobachtung vor, in der keine individuellen Einkommensgeschichten aufgezeichnet werden. Des weiteren wird angenommen, dass ein spezielles Modell respektive eine Hypothese der Übergangsdynamik evaluiert werden soll. Dieses Modell kann aus theoretischen Überlegungen abgeleitet worden sein oder aus empirischen Betrachtungen einer anderen Population resultieren, bei der die fehlende Zeitreihen-Information vorhanden war. Es wird aufgezeigt, dass durch Anpassung der Hypothese statistische Schlüsse über die Übergangsdynamik möglich sind, auch wenn die notwendige Information über das Einkommen eines Individuums in beiden Perioden fehlen sollte. Der Ansatz ermög-

---

<sup>4</sup> Dieses Kapitel bezieht sich auf die Arbeit "Evaluating Theories of Income Dynamics: A Probabilistic Approach" von Aebi, Neusser und Steiner (1999).

<sup>5</sup> Das Konzept der relativen Entropie ist in der Ökonometrie nicht stark verbreitet. Wichtige Ausnahmen sind White (1982), Golan, Judge und Miller (1996), oder Kitamura und Stutzer (1997).

licht neben statistischen Tests auch Aufschlüsse darüber, in welcher Weise die Hypothese fehlspezifiziert ist und wie sie optimal angepasst werden muss, um wichtige Grössen zur Beschreibung der Einkommensdynamik zu berechnen (Mobilitätsindices, Projektionen in die Zukunft etc.).

Es zeigt sich, dass das oben erwähnte Problem äquivalent zum Problem der Anpassung der Zellenhäufigkeiten einer Kontingenztabelle an bekannte und festgelegte Randverteilungen ist.<sup>6</sup> Diese Fragestellung wurde in der statistischen Literatur unter anderen durch Deming und Stephan (1940) sowie Ireland und Kullback (1968) behandelt. Diese Autoren schlagen zur praktischen Lösung dieses Problems einen Algorithmus vor, der in der Literatur als iterativ-proportionale Anpassungsprozedur (Iterative Proportional Fitting Procedure, IPFP) bekannt ist.<sup>7</sup> Unter dem Begriff "grosse Abweichungen" für Kontingenztabellen erarbeitete Aebi (1996, 1997) einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Rahmen. Darin zeigt er auf, wie die "wahrscheinlichsten" Anpassungen beobachteter Kontingenztabellen an vorgegebene Randverteilungen berechnet werden.

Gewinnbringende Anwendungen dieses Ansatzes auf so unterschiedliche Bereiche wie die Theorie der Einkommensverteilung oder die Konvergenzhypothese in der Wachstumstheorie sind durchaus denkbar. Die erste Anwendungsmöglichkeit bezieht sich auf die in jüngster Zeit in einigen Ländern (USA, UK und andere) festgestellte Zunahme der Einkommensungleichheit. Die Gründe für diesen Anstieg werden in der Literatur breit diskutiert, was der Ökonomie der Einkommensverteilung zu neuem Interesse verhalf (Atkinson 1997, Gottschalk 1997). Wie erwähnt ist es bei Betrachtungen zu Verteilungsfragen wichtig, nicht bloss die Einkommensverteilung sondern auch deren Dynamik zu untersuchen, wofür ein Mass der Mobilität innerhalb der Einkommensverteilung vonnöten ist. Hierzu muss jedoch die gesamte Über-

---

<sup>6</sup> Eine Kontingenztabelle hält aufgrund eines Zufallsmechanismus zustandgekommene Häufigkeiten tabellarisch fest. So steht z.B. in der zweiten Zelle der ersten Zeile einer Tabelle, in deren Zeilen die Einkommensklassenzugehörigkeit im Anfangsjahr und in deren Spalten diejenigen des Endjahres festgehalten sind, die Anzahl Individuen, welche im Startjahr in der untersten und im Endjahr in der zweituntersten Einkommensklasse waren.

<sup>7</sup> In Abschnitt 2.3.3 wird der IPFP-Algorithmus detailliert beschrieben.



gangsdynamik modelliert werden, wofür sich die hier vorgestellte Methode der Minimierung der relativen Entropie vortrefflich eignet. Demgegenüber versichert die Konvergenzhypothese, dass Unterschiede im pro-Kopf-Einkommen zwischen verschiedenen Ländern vorübergehender Natur sind, wenn Technologie, Präferenzen und das Bevölkerungswachstum berücksichtigt werden. Wie von Quah (1996) ausgeführt wurde, leidet die ursprünglich von Barro und Sala-i-Martin (1992) unterstützte länderübergreifende Wachstumsgleichung an ernsthaften Unzulänglichkeiten, welche unzuverlässige Schlüsse nach sich ziehen. Deshalb schlägt Quah (1996) vor, explizit die Dynamik der gesamten länderübergreifenden Einkommensverteilung zu modellieren.<sup>8</sup>

Obwohl diese zwei Anwendungsgebiete ziemlich verschiedenen ökonomischen Traditionen zuzuordnen sind, werden für die Analyse der Dynamik der involvierten Verteilungen ähnliche Werkzeuge benötigt. In beiden Literaturzweigen wird die zeitliche Entwicklung der Einkommensverteilung mittels einer Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix (oder einem stochastischen Kern im stetigen Fall) aus einer Panelstudie geschätzt. Die Mobilität wird dann durch Berechnung eines skalaren Mobilitätsmasses aus der Übergangsmatrix geschätzt.<sup>9</sup> Die Konvergenzhypothese kann durch Berechnung der stationären Verteilung aus der entsprechenden Übergangsmatrix abgeschätzt werden.<sup>10</sup>

Obschon diese Betrachtungen interessante Einblicke gewähren, sind sie nur deskriptiver Natur. Es fehlt an einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Fundament sowie an der Möglichkeit, Theorien der Einkommensdynamik, formuliert als Übergangsmatrizen, zu testen und zu evaluieren. Ein Zweck dieser Arbeit besteht deshalb darin, ein methodisches Fundament zum Testen und Evaluieren von Theorien der Einkom-

---

<sup>8</sup> Hierbei werden die einzelnen Staaten wie Individuen behandelt, wobei anstelle des individuellen Einkommens das jeweilige pro-Kopf-Einkommen eines Staates tritt.

<sup>9</sup> Vergleiche Shorrocks (1978) für eine theoretische Diskussion. Schlüter (1998) und Trede (1999) liefern Beispiele empirischer Anwendungen.

<sup>10</sup> Durlauf und Quah (1998) liefern ausführliche Referenzen und eine kritische Abhandlung der Literatur.

mensdynamik zu erarbeiten. Überdies lässt sich dieser Ansatz problemlos auf andere verwandte Fragestellungen erweitern.

Zudem fehlen zumindest bei den individuellen Einkommensdaten der meisten Länder zuverlässige Panelstudien. Auch sind Paneldaten bei der Ermittlung der Mobilität zunehmend unzuverlässiger, je länger die untersuchten Zeitabschnitte sind. Die hier vorgestellte Methode erlaubt jedoch die Schätzung vernünftiger Einkommensdynamiken aus Querschnittsdaten und kann somit zu einer Lösung dieser Problematik beitragen. Zusätzlich eröffnet sie die Möglichkeit, Übergangsdynamiken aus Panelstudien, welche ja Stichproben darstellen, mit Hilfe entsprechender Querschnittsdaten an die Grundgesamtheit anzupassen und somit die Qualität von üblichen Schätzungen der Einkommensdynamik zu verbessern.

## 2.2 GRUNDLAGEN

Um den Einstieg in die Materie zu erleichtern werden hier einige zentrale Begriffe wie Einkommens- respektive Randverteilung, Übergangsmatrix, zweidimensionale Dichtematrix und Markovkette auf leicht verständliche Weise eingeführt. Wer mit diesen Begriffen vertraut ist, kann diesen Abschnitt überspringen und direkt mit Abschnitt 2.3 beginnen. Die hier erläuterten Begriffe werden auch im nächsten Abschnitt beschrieben, jedoch auf mathematischere Art und nicht in der hier ausgeführten Einfachheit und Ausführlichkeit.

Es sei eine Gesellschaft zu zwei Zeitpunkten ( $t$  und  $t+1$ ) betrachtet. Sind die individuellen Einkommen zu beiden Zeitpunkten bekannt, dann können daraus die *Einkommensverteilungen* zu beiden Zeitpunkten hergeleitet werden. Der Einfachheit halber wird hier von  $K$  diskreten Einkommensklassen und nicht von einem Einkommenskontinuum ausgegangen. Die beobachteten Einkommensverteilungen werden deshalb als  $(K \times 1)$ -Vektoren dargestellt.

$$m_{t,i} \geq 0, \quad m_{t+1,j} \geq 0 \quad \forall i,j \in \{1, \dots, K\};$$

$$\sum_{i=1}^K m_{t,i} = 1, \quad \sum_{j=1}^K m_{t+1,j} = 1.$$

Hierbei entspricht  $m_{t,i}$  der Wahrscheinlichkeit, dass ein individuelles Einkommen zum Zeitpunkt  $t$  in Einkommensklasse  $i$  fällt.<sup>11</sup> Analog ist  $m_{t+1,j}$  die Wahrscheinlichkeit für ein individuelles Einkommen zum Zeitpunkt  $t+1$ , in Klasse  $j$  zu fallen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden im folgenden die als beobachtet vorausgesetzten wahren Einkommensverteilungen, welche die Grundgesamtheit aller Individuen der betrachteten Gesellschaft repräsentieren sollen, mit  $m_t$  respektive  $m_{t+1}$  bezeichnet. Mit  $\mu_t$  respektive  $\mu_{t+1}$  werden Einkommensverteilungen bezeichnet, welche Stichproben repräsentieren respektive willkürlich gewählt sind.

Um die Dynamik des Einkommensverteilungsprozesses zu analysieren, sind neben der Einkommensverteilung zu zwei Zeitpunkten auch Informationen über den dynamischen Prozess notwendig, das heisst Informationen darüber, wieviele Individuen sich während des betrachteten Zeitraums (von  $t$  bis  $t+1$ ) aus ihrer angestammten Einkommensklasse zum Zeitpunkt  $t$  in ihre neue Einkommensklasse zum Zeitpunkt  $t+1$  bewegt haben. Wäre neben den individuellen Einkommen zu beiden Zeitpunkten auch die Zuordnung dieser Einkommen zu den Individuen der betrachteten Gesellschaft bekannt, dann liesse sich aus dieser zusätzlichen Information die Einkommensdynamik herleiten. In der Literatur zu Einkommensverteilung und Mobilität wird meist mit den allseits bekannten *Übergangs-* oder *Transitionsmatrizen*  $P$  zur Beschreibung der Einkommensdynamik gearbeitet.<sup>12</sup> Diese quadratischen  $(K \times K)$ -

---

<sup>11</sup> Sind die individuellen Einkommen zum Zeitpunkt  $t$  bekannt, dann entspricht  $m_{t,i}$  dem Quotienten aus der Anzahl Einkommen in Einkommensklasse  $i$  und der Gesamtzahl individueller Einkommen. Dieser Quotient wird auch als relative Häufigkeit bezeichnet. Mathematisch korrekt müsste die relative Häufigkeit der Einkommen in Einkommensklasse  $i$  als Schätzer für die Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden, dass ein individuelles Einkommen in Klasse  $i$  fällt.

<sup>12</sup> Champernowne (1953) betrachtete als erster die Einkommensverteilung als das gleichgewichtige Resultat eines Markov-Prozesses, spezifiziert durch eine Übergangsmatrix. Er präsentierte Bedingungen für die Übergangsmatrix, so dass die ergodische Verteilung Pareto's Gesetz genüge. Dieses besagt, dass der Logarithmus der Anzahl Personen, deren Einkommen grösser oder gleich einem Einkommenswert  $y$  ist, eine lineare Funktion des Logarithmus ebendieses Einkommens ist. Dahinter steckt die Beobachtung, dass nur sehr wenig Individuen ein hohes Einkommen erzielen, während die meisten niedrige Einkommen generieren. Es sei hier angemerkt, dass die Pareto-Verteilung bei hohen Einkommen die Realität gut widerspiegelt, bei tiefen Einkommen jedoch

Matrizen enthalten die Wahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  für jedes Individuum, dass es zum Zeitpunkt  $t+1$  in Einkommensklasse  $j$  sein wird, wenn es zum Zeitpunkt  $t$  aus Klasse  $i$  starten konnte. Übergangsmatrizen werden auch *stochastische Matrizen* genannt.

$$P = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,K} \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^K p_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, K$$

$$\text{und } p_{ij} \in [0,1].$$

Da sich die Zeilen einer Übergangsmatrix  $P$  immer zu 1 summieren bedeutet dies, dass in den Zeilen von  $P$  Wahrscheinlichkeitsverteilungen stehen. Anders ausgedrückt stehen in den Zeilen  $i$  von  $P$  die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  dafür, zum Zeitpunkt  $t+1$  in Klasse  $j$  zu enden, wenn zur Zeit  $t$  aus Klasse  $i$  gestartet wurde.

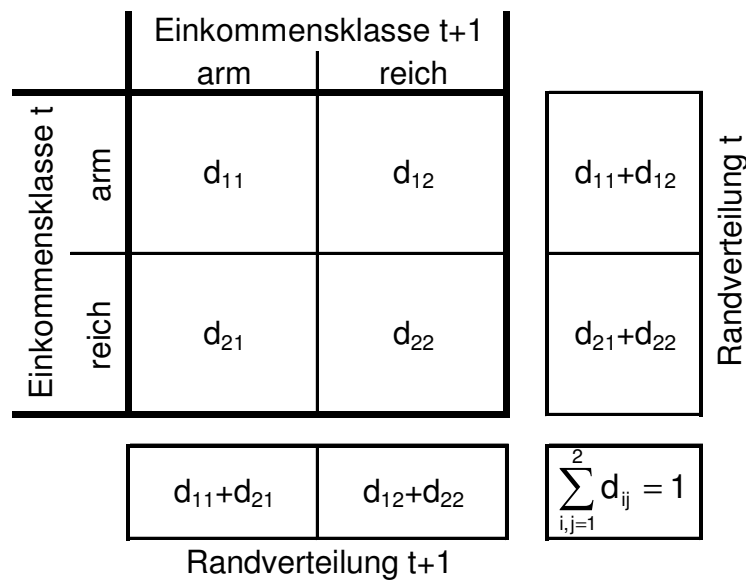
Im Gegensatz dazu werden in Anwendungen der Theorie grosser Abweichungen oft die unbedingten Wahrscheinlichkeiten  $d_{ij}$  für die Individuen benötigt, sich im Zeitpunkt  $t$  in Klasse  $i$  und im Zeitpunkt  $t+1$  in Klasse  $j$  zu befinden. Matrizen, die diese unbedingten Wahrscheinlichkeiten zusammenfassen, werden im folgenden *zweidimensionale Dichtematrizen*  $D$  genannt.<sup>13</sup>

$$D = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,K} \quad \text{mit} \quad \sum_{i,j=1}^K d_{ij} = 1 \quad \text{und} \quad d_{ij} \in [0,1].$$

Da sich die Elemente von  $D$  zu 1 summieren und sich auf zwei Argumente beziehen (Einkommensklassenzugehörigkeiten zu zwei Zeitpunkten), handelt es sich bei  $D$  um eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung respektive Dichte. In Abbildung 2-1 wird der Begriff der zweidimensionalen Dichtematrix anschaulich dargestellt. Der Einfachheit halber wird in dieser Grafik von einer Gesellschaft ausgegangen, welche in arm und reich, also bloss in zwei Einkommensklassen ( $K = 2$ ) unterteilt wird.

nicht einmal approximativ zutrifft. Später diskutierten Wagner (1978), Conlisk (1990) und Dardanoni (1995) alternative Hypothesen über die Form der Übergangsmatrix.

<sup>13</sup> Es sei hier angemerkt, dass dieser Begriff streng genommen nicht ganz korrekt ist, da sich eine Dichte auf stetige und nicht diskrete Zustandsräume bezieht. Dasselbe gilt eigentlich auch für den Begriff Einkommensverteilung.



**Abbildung 2-1:** Beispiel einer zweidimensionalen Dichtematrix

Repräsentiert die zweidimensionale Dichte die wahre Einkommensdynamik respektive die Grundgesamtheit, dann resultiert durch Bildung der Zeilensummen von  $D$  die Einkommensverteilung  $m_t$  zum Ausgangszeitpunkt  $t$ . Analog liefern die Spaltensummen von  $D$  die Einkommensverteilung  $m_{t+1}$  zum Endzeitpunkt  $t+1$ . Deshalb wird oft auch von *Randverteilungen* anstelle von Einkommensverteilungen respektive Einkommensquerschnitten die Rede sein. In Matrixschreibweise bedeutet dies:

$$D \cdot \mathbf{1} = m_t ,$$

$$D' \cdot \mathbf{1} = m_{t+1} .$$

Dabei ist  $\mathbf{1}$  der  $(K \times 1)$ -Vektor aus lauter Einsen. Zudem sind die beiden Randverteilungen durch die zugehörige Übergangsmatrix wie folgt miteinander verknüpft:

$$m'_{t+1} = m'_t \cdot P .$$

Die Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  stellen eigentlich bloss zwei Beobachtungen einer unendlichen Abfolge von Einkommensverteilungen dar, welche von einer Gesellschaft im Zeitablauf durchlaufen werden. Bleibt der dynamische Prozess (die Übergangsmatrix  $P$ ) im Zeitablauf unverändert, resultiert dabei eine sogenannte *Markov-*

kette wie in Abbildung 2-2 dargestellt:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow m_0 \xrightarrow{P, D_1} m_1 \xrightarrow{P, D_2} m_2 \rightarrow \dots \rightarrow m_t \xrightarrow{P, D_{t+1}} m_{t+1} \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \pi \xrightarrow{P, D_\infty} \pi \rightarrow \dots \rightarrow \pi \xrightarrow{P, D_\infty} \pi \rightarrow \dots \end{aligned}$$

**Abbildung 2-2:** Markovkette einer primitiven Übergangsmatrix P

Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Übergangsmatrix primitiv ist.<sup>14</sup> Dies hat zur Folge, dass die entsprechende Markovkette regulär ist und dass der Einkommensverteilungsprozess gegen ein eindeutiges Gleichgewicht, repräsentiert durch die Gleichgewichtsverteilung  $\pi$ , konvergiert.<sup>15</sup> Abbildung 2-2 verdeutlicht, dass bei einem zeitlich invarianten Einkommensprozess zwar die zugrundeliegende Übergangsmatrix invariant bleibt, die zweidimensionale Dichte sich hingegen dauernd verändert. Erst wenn sich der Prozess in seinem Gleichgewicht befindet, ist auch die zweidimensionale Dichte zeitlich invariant.

Bei der in den folgenden Abschnitten von Kapitel 2 vorgestellten Methode der Minimierung der relativen Entropie bedarf es, mangels Kenntnis der wahren Dynamik, einer Hypothese über die den beobachteten wahren Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  zugrundeliegende Einkommensdynamik. Diese Hypothese kann in Form einer Übergangsmatrix oder als zweidimensionale Dichte formuliert werden. Wegen der zeitlichen Invarianz der Markovkette erscheint es sinnvoller, diese Hypothese jeweils als Übergangsmatrix P zu formulieren. Um die Minimierungsmethode dann konkret anzuwenden, muss diese hypothetische Übergangsmatrix noch in die korrespondierende zweidimensionale Dichtematrix umgewandelt werden.

Zwischen Übergangs- und Dichtematrix besteht der folgende Zusammenhang:

$$D = \text{diag}(\mu) \cdot P .$$

<sup>14</sup> Bei primitiven Übergangsmatrizen P existiert eine natürliche Zahl m so, dass alle Matrixelemente in  $P^m$  für alle natürlichen Zahlen  $\geq m$  positiv sind.

<sup>15</sup> In Abschnitt 3.3.1 wird näher auf reguläre Markovprozesse, primitive Matrizen und Gleichgewichtsverteilungen eingegangen. Das Konvergenzverhalten einer primitiven Übergangsmatrix wird im Anhang in Abschnitt 9.2.4 dargestellt.

Hierbei ist  $\mu$  eine arbiträre Anfangsverteilung und  $\text{diag}(\mu)$  entspricht der Diagonalmatrix mit  $\mu$  in der Hauptdiagonalen. Entsprechen sowohl die zweidimensionale Dichte als auch die Übergangsmatrix der wahren Einkommensdynamik der Grundgesamtheit aller Individuen, erfüllt die Anfangsverteilung  $m_t$  als einzige Verteilung den obigen Zusammenhang zwischen  $D$  und  $P$  und es ist  $\mu = m_t$  zu setzen. Wird die Übergangsdynamik  $P$  hingegen nicht der Grundgesamtheit entnommen, dann ist streng genommen  $\mu$  und damit in gewissem Sinne auch  $D$  arbiträr. Dennoch wird im folgenden auch in diesen Fällen für  $\mu$  die die Grundgesamtheit repräsentierende wahre Anfangsverteilung  $m_t$  eingesetzt.<sup>16</sup>

### 2.3 EIN WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORETISCHES MODELL<sup>17</sup>

Im folgenden wird eine grosse Zahl von  $N$  unterscheidbaren Individuen betrachtet, deren Einkommen sich unabhängig voneinander entwickeln, getrieben durch den selben unbekanntem, diskreten und zeitinvarianten Markovprozess. Dies bedeutet, dass die den Markovprozess repräsentierende Übergangsmatrix sich im Zeitablauf nicht verändert. Ausgehend von irgend einer Anfangs-Einkommensverteilung zum Zeitpunkt 0 mit Dichte  $m_0$  generiert der Prozess eine zeitliche Sequenz von Einkommensquerschnitten, welche durch ihre Dichten  $\{m_t\}$  mit  $t \in \{1, 2, \dots\}$  repräsentiert werden (vergleiche Abbildung 2-2). Um die Präsentation zu vereinfachen und mit

---

<sup>16</sup> Wird als Ausgangspunkt vorzunehmender Betrachtungen die zweidimensionalen Dichte  $D$  gewählt, dann entsprechen die Elemente von  $\mu$  den entsprechenden Zeilensummen von  $D$  was gleichbedeutend mit  $m_t$  ( $D$  entstammt der Grundgesamtheit) respektive  $\mu_t$  ( $D$  widerspiegelt eine Stichprobe) ist. Da in der Dichtematrix  $D$  sowohl die Information über die Einkommensdynamik wie auch über die zugehörigen Randverteilungen enthalten ist, ist damit auch die zugehörige Transitionsmatrix  $P$  eindeutig festgelegt.

Bildet hingegen die Übergangsmatrix  $P$  den Ausgangspunkt und ist die zugehörige Anfangsverteilung unbekannt, dann ist  $\mu$  und somit auch  $D$  arbiträr, da für unterschiedliche  $\mu$  über die Beziehung  $D = \text{diag}(\mu) \cdot P$  unterschiedliche  $D$  resultieren. Wird die als beobachtet vorausgesetzte effektive Anfangsverteilung  $m_t$  anstelle von  $\mu$  gesetzt, wird natürlich damit ein Teil der Beobachtung schon in die Hypothese integriert. In Abschnitt 2.4 wird diese Wahl für  $\mu$  ausführlich begründet.

<sup>17</sup> Die wahrscheinlichkeitstheoretische Motivation geht auf Aebi (1996, 1997) zurück.

Blick auf empirische Anwendungen werden diese Verteilungen definiert auf eine bestimmte endliche Partition  $I = \{I_i\}_{i=1, \dots, K}$  des  $\mathfrak{R}^+$ , es handelt sich somit um diskrete Dichten  $m_t$ . Der Einkommensprozess entspricht damit einer Markovkette mit Anfangsverteilung  $m_0$ . Somit ist  $\{m_t\} = \{(m_{t,1}, \dots, m_{t,K})'\}$  nichts anderes als eine Sequenz von Vektoren der Dimension  $K$  mit den Eigenschaften:

$$m_{t,i} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, K\},$$

$$\sum_{i=1}^K m_{t,i} = 1, \quad t \in \{1, 2, \dots\}.$$

Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass diese Sequenz nur zu zwei Zeitpunkten  $t$  und  $t+1$  beobachtet wird. In den Beispielen der Kapitel 5 bis 7 werden diverse Möglichkeiten der Methode anhand von Untersuchungen zur Einkommensdynamik der USA zu den Zeitpunkten  $t = 1979$  und  $t+1 = 1989$  demonstriert. Die Einkommen in beiden Zeitpunkten sind folglich gemäss den diskreten, auf  $I$  definierten Wahrscheinlichkeitsdichten  $m_t = (m_{t,1}, \dots, m_{t,K})'$  und  $m_{t+1} = (m_{t+1,1}, \dots, m_{t+1,K})'$  verteilt. Dabei bedeutet  $m_{t,i}$  die Wahrscheinlichkeit, dass ein individuelles Einkommen in Periode  $t$  in die  $i$ -te Einkommensklasse fällt. Zusätzlich wird angenommen, dass keine Information bezüglich der wahren Übergangswahrscheinlichkeiten des Markovprozesses vorliegt.

Bestünde hingegen die Möglichkeit, das Einkommen jedes Individuums im Zeitablauf zu verfolgen, dann liesse sich abzählen, wie viele Personen sich in Periode  $t$  in der Einkommensklasse  $i$  und im Zeitabschnitt  $t+1$  in der Einkommensklasse  $j$  befinden. Diese Zahlen werden mit  $\gamma_{ij}$  bezeichnet und in einer  $(K \times K)$ -Kontingenztafel  $\Gamma$  geordnet:

$$\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=1, \dots, K} \quad \text{mit} \quad \sum_{i,j=1}^K \gamma_{ij} = N \quad \text{und} \quad \gamma_{ij} \in [0, N].$$

Diese Matrix wird als Einkommensgeschichte bezeichnet.  $\Gamma$  lässt sich auch durch die korrespondierende zweidimensionale gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung (zweidimensionale Dichtematrix)  $D$  beschreiben:

$$D = (d_{ij})_{i,j=1, \dots, K} = \frac{\Gamma}{N}.$$



Die wahre Einkommensgeschichtematrix  $\Gamma_{\text{wahr}}$  respektive die zugehörige zweidimensionale Dichte  $D_{\text{wahr}}$  sind in der Regel nicht beobachtbar. Davon ist lediglich bekannt, dass sie mit den beobachteten wahren Einkommensverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  kompatibel sein müssen. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass beim Übergang von  $t$  nach  $t+1$  niemand verloren geht oder hinzu kommt.<sup>18</sup> Deshalb muss jede Person, die aus einer Einkommensklasse  $i$  startet, in einer Einkommensklasse  $j$  enden. Auch muss jedes Individuum, das in einer Klasse  $j$  endet, aus einer Einkommensklasse  $i$  gestartet sein. Somit müssen die Einkommensgeschichtematrix respektive die zugehörige zweidimensionale Dichtematrix die folgenden Restriktionen erfüllen:

$$(2-1) \quad \sum_{j=1}^K \gamma_{ij} = N \cdot m_{t,i} \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}; \quad \sum_{i=1}^K \gamma_{ij} = N \cdot m_{t+1,j} \quad \forall j \in \{1, \dots, K\};$$

$$\sum_{j=1}^K d_{ij} = m_{t,i} \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}; \quad \sum_{i=1}^K d_{ij} = m_{t+1,j} \quad \forall j \in \{1, \dots, K\}.$$

Diese Restriktionen können in Matrixnotation, mit Hilfe des aus lauter Einsen bestehenden  $(K \times 1)$ -Vektors  $\mathbf{1}$ , kompakter geschrieben werden als:

$$(2-1)' \quad \Gamma \cdot \mathbf{1} = N \cdot m_t \quad \Gamma' \cdot \mathbf{1} = N \cdot m_{t+1}$$

$$D \cdot \mathbf{1} = m_t \quad D' \cdot \mathbf{1} = m_{t+1}.$$

Da  $\sum_i m_{t,i} = 1$  und  $\sum_j m_{t+1,j} = 1$  sind, implizieren die obigen Bedingungen  $2 \cdot K - 2$  unabhängige Restriktionen für  $\Gamma$  respektive  $D$ , welche *Kontinuitätsrestriktionen* oder *Anfangs- und Endrestriktionen* genannt werden.

Im Allgemeinen werden diese Restriktionen von unendlich vielen Einkommensgeschichten respektive zweidimensionalen Dichten erfüllt. So begründen alle mit den

---

<sup>18</sup> Auch wenn diese Annahme auf den ersten Blick unrealistisch erscheint lässt sie sich etwas plausibler darstellen indem man, wie Champernowne (1953),  $N$  als die Anzahl der Einkommen anstelle der Individuen interpretiert. Dies bedeutet mit den Worten Champernowne's, dass "the incomes live on individually, although their recipients are transitory". Alternativ könnte eine "Einkommensklasse" 0 eingeführt werden. Zum Zeitpunkt  $t$  befinden sich darin diejenigen Individuen, welche im Zeitpunkt  $t+1$  erhoben wurden, jedoch im Zeitpunkt  $t$  nicht erscheinen (Neuzugänge, "Geburten"). Im Zeitpunkt  $t+1$  sind darin jene Individuen enthalten, welche zum Zeitpunkt  $t$ , nicht jedoch zum Zeitpunkt  $t+1$  erhoben wurden (Abgänge, "Sterbefälle").

beobachteten Einkommensverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  kompatiblen zweidimensionalen Dichtematrizen einen konvexen Unterraum  $\bar{\mathbf{D}}$  des Raumes aller zweidimensionalen  $(K \times K)$ -Dichten  $D$  (vergleiche hierzu auch Abbildung 2-3).<sup>19</sup> Somit lassen sich die Kontinuitätsrestriktionen auch mengentheoretisch ausdrücken:

$$(2-1)'' \quad D \in \bar{\mathbf{D}} .$$

Die unbekannte wahre zweidimensionale Dichte, die es zu schätzen gilt, ist ein Element der Menge  $\bar{\mathbf{D}}$ . Da der wahre Einkommensprozess unbekannt ist, bedarf es einer Hypothese respektive eines Modells der Einkommensdynamik für die Periode von  $t$  bis  $t+1$ . Diese wird als zweidimensionale Dichtematrix  $D_{\text{mod}} = (d_{\text{mod}, ij})_{i,j=1, \dots, K}$  formuliert. Diese Hypothese, welche empirischen Betrachtungen (vergleiche Kapitel 5 und 7) oder theoretischen Überlegungen (vergleiche Kapitel 6) entstammt, kann entweder direkt oder besser über die Zwischenstufe einer Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}} = (p_{\text{mod}, ij})_{i,j=1, \dots, K}$  aufgestellt werden. Dies deshalb, weil die Übergangsmatrix, im Gegensatz zur Dichtematrix, unter den getroffenen Annahmen zeitlich konstant bleibt und auch weil Übergangsmatrizen in der Ökonomie weitaus geläufiger sind. Wie erwähnt kann einer zweidimensionalen Dichte  $D$  eindeutig eine Transitionsmatrix  $P$  zugeordnet werden. Umgekehrt existieren zu einer gegebenen Übergangsmatrix  $P$  beliebig viele kompatible Dichtematrizen  $D$ . Für jede willkürlich gewählte anfängliche Einkommensverteilung  $\mu_t = (\mu_{t,1}, \dots, \mu_{t,K})'$  entspricht  $\mu_{t,i} \cdot p_{\text{mod}, ij} = d_{\text{mod}, ij}$  der unbedingten Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum in Periode  $t$  in der Einkommensklasse  $i$  und in Periode  $t+1$  in Klasse  $j$  ist. Bei gegebener hypothetischer Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  ist das Problem der nicht eindeutig bestimmten Hypothese  $D_{\text{mod}}$  somit identisch mit der Unbestimmtheit von  $\mu_t$ , der Anfangsverteilung der Modelldynamik. Die Lösung dieser Unbestimmtheitsproblematik wird in Abschnitt 2.4 erörtert.<sup>20</sup> Die hypothetische zwei-

---

<sup>19</sup> Ein Beweis der Konvexität des Raums  $\bar{\mathbf{D}}$  findet sich in Abschnitt 9.1.2.

<sup>20</sup> Die Lösung besteht kurz gesagt darin, die Anfangsverteilung der Hypothese  $\mu_t$  mit der beobachteten wahren Anfangsverteilung  $m_t$  gleichzusetzen. Diese Vermengung von Hypothese und Anfangsbeobachtung lässt sich auch dadurch rechtfertigen, dass die Lösung des nachfolgend dargestellten Optimierungsproblems die Kontinuitätsrestriktionen (2-1) sowieso erfüllen muss.

dimensionale Dichte entspricht dann der Matrix

$$D_{\text{mod}} = (d_{\text{mod}, ij})_{i,j=1,\dots,K} = (\mu_{t,i} \cdot p_{\text{mod}, ij})_{i,j=1,\dots,K} = \text{diag}(\mu_t) \cdot P_{\text{mod}}.$$

Hierbei entspricht  $\text{diag}(\mu_t)$  der Diagonalmatrix mit  $\mu_t$  in der Hauptdiagonalen. Es sei hier darauf hingewiesen, dass die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  im allgemeinen die Kontinuitätsrestriktionen (2-1) nicht erfüllen wird. Beim später erläuterten statistischen Testen entspricht diese zweidimensionale Dichte der zu testenden Nullhypothese (vergleiche Abschnitt 2.5).

Die Kontinuitätsrestriktionen (2-1) sind jedoch nicht ausreichend, um die Einkommensgeschichte  $\Gamma$  respektive die zugehörige zweidimensionale Dichte eindeutig zu bestimmen. Das Problem, welches sich hier stellt, kann folgendermassen beschrieben werden:

Unter allen Möglichkeiten ist diejenige Einkommensgeschichte  $\Gamma_{\text{opt}}$  respektive die zugehörige zweidimensionale Dichtematrix  $D_{\text{opt}}$  zu finden, welche die Nebenbedingungen der Kontinuitätsrestriktionen (2-1) erfüllt und unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  mit maximaler Wahrscheinlichkeit realisiert wird.

Dieses Problem wird in zwei Schritten gelöst. Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass eine bestimmte Einkommensgeschichte  $\Gamma$  unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  überhaupt realisiert wird. Danach wird das zugrundeliegende Optimierungsproblem gelöst. Die Analyse ist jedoch nicht unkompliziert, da die Hypothese im allgemeinen die Kontinuitätsrestriktionen nicht erfüllt. Das Gesetz der grossen Zahlen impliziert jedoch, dass die Realisationswahrscheinlichkeit jeder unter den beobachteten Einkommensverteilungen möglichen Einkommensgeschichtematrix aus der Perspektive der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  gegen null strebt, wenn  $N$  gegen unendlich tendiert. Bei der Lösung dieses Unbestimmtheitsproblems wird auf ein *Prinzip der grossen Abweichungen* abgestützt.<sup>21</sup> Konkret bedeutet dies, dass diejenige Einkommensgeschichte

---

<sup>21</sup> Das Anwendungsgebiet der Theorie grosser Abweichungen lässt sich am besten anhand eines Gedankenexperiments mit Münzwürfen umreissen. Bei einer fairen Münze (gleiche Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse Kopf und Zahl) nimmt die Wahrscheinlichkeit für ein seltenes Ereignis, z.B. mehr als 70% geworfene Köpfe, mit steigender Anzahl Münzwürfe rasch ab. Die Theorie grosser Abweichungen beschäftigt sich nun mit der Geschwindigkeit, mit der die Wahrscheinlichkeit

$\Gamma$  gesucht wird, deren Realisierungswahrscheinlichkeit bei steigendem  $N$  mit der langsamsten Rate gegen null tendiert.

### 2.3.1 Wahrscheinlichkeiten von Einkommensgeschichtematrizen

Es wird die Annahme getroffen, dass die zeitliche Entwicklung individueller Einkommen unabhängig voneinander geschieht. Es soll nun die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass eine gegebene Einkommensgeschichte  $\Gamma$  von  $N$  Individuen unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  realisiert wird. Diese gegebene Geschichte  $\Gamma$  kann auf verschiedene Arten aus  $N$  individuellen Einkommenspfaden realisiert werden. In einem ersten Schritt soll zunächst die Anzahl unterscheidbarer Realisationsmöglichkeiten von  $\Gamma$  berechnet werden. Diese korrespondiert zur Zahl der Möglichkeiten,  $N$  unterscheidbare Individuen in Subgruppen von  $\gamma_{ij}$  Personen zu arrangieren. Diese Zahl kann durch elementare Kombinatorik wie folgt bestimmt werden:

$$(2-2) \quad n(\Gamma) = \binom{N}{\gamma_{11}} \cdot \binom{N - \gamma_{11}}{\gamma_{12}} \cdot \binom{N - \gamma_{11} - \gamma_{12}}{\gamma_{13}} \dots \binom{N - \sum_{j=1}^K \gamma_{1j}}{\gamma_{21}} \dots \binom{N - \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{K-1} \gamma_{ij} - \sum_{j=1}^{K-1} \gamma_{Kj}}{\gamma_{KK}} = \frac{N!}{\prod_{i,j=1}^K \gamma_{ij}!}.$$

Da die Individuen unterscheidbar sind, lässt sich die Geschichte  $\Gamma$  durch die  $N$  Individuen auf  $n(\Gamma)$  Arten erzielen. Im nächsten Schritt soll die Realisierungswahrscheinlichkeit einer dieser  $n(\Gamma)$  Möglichkeiten unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  eruiert werden. Unter der Modelldynamik  $D_{\text{mod}}$  berechnet sich diese Wahrscheinlichkeit der Realisa-

seltenere Ereignisse bei steigender Anzahl Beobachtungen (Münzwürfe) gegen 0 strebt. Mit anderen Worten wird das Verhalten in den Enden von Verteilungen untersucht. Die Theorie grosser Abweichungen kann also auch als Theorie der seltenen Ereignisse oder als Theorie des Studiums der Enden von Verteilungen bezeichnet werden. Die Realisationswahrscheinlichkeit solcher seltenen Ereignisse strebt exponentiell gegen 0 und diese exponentielle Konvergenzgeschwindigkeit ist in der Theorie grosser Abweichungen von zentralem Interesse. Vergleiche hierzu die Webseiten [http://www.stp.dias.ie/APG/coin\\_tossing.html](http://www.stp.dias.ie/APG/coin_tossing.html) respektive [.../rate\\_function.html](http://www.stp.dias.ie/APG/rate_function.html) des Dublin Institute for Advanced Studies (den Netscape-Browser benutzen). In Abschnitt 9.1.4 im Anhang ist je ein Beispiel aus beiden Webseiten dargestellt.

tion einer spezifischen  $\Gamma$ -Matrix aus den  $n(\Gamma)$  Möglichkeiten, wie bei Multinomialverteilungen üblich, gemäss:

$$(2-3) \quad \Pr(\Gamma) = \prod_{i,j=1}^K (\mu_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij})^{\gamma_{ij}} = \prod_{i,j=1}^K (d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{ij}} .$$

Da es makroökonomisch nicht von Interesse ist, welches Individuum sich im Einkommensprozess wo befindet, ist nicht die Realisationswahrscheinlichkeit einer spezifischen  $\Gamma$ -Matrix von Interesse sondern die Wahrscheinlichkeit dafür, dass überhaupt eine  $\Gamma$ -Matrix realisiert wird. Aus der Perspektive der Hypothese ergibt sich die Realisationswahrscheinlichkeit  $\Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}})$  der Einkommensgeschichte  $\Gamma$  somit durch Multiplikation der Gleichungen (2-2) und (2-3) zu:

$$(2-4) \quad \Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}}) = \Pr(\Gamma) \cdot n(\Gamma) = \frac{N!}{\prod_{i,j=1}^K \gamma_{ij}!} \cdot \prod_{i,j=1}^K (d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{ij}} = N! \cdot \prod_{i,j=1}^K \frac{(d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{ij}}}{\gamma_{ij}!} .$$

### 2.3.2 Minimierungsproblem und optimal adjustierte Dynamik

Es existieren viele Einkommensgeschichten, welche mit den Kontinuitätsrestriktionen (2-1) kompatibel sind. Um aus diesen die aus Sicht der Hypothese beste Einkommensgeschichte  $\Gamma$  respektive die korrespondierende zweidimensionale Dichte  $D$  eindeutig zu bestimmen, wird die *Fundamentalhypothese der statistischen Mechanik* auf die Evolution der Einkommen angewandt. Diese allgemeine Erfahrung aus der Teilchenphysik besagt:

Eine Beobachtung auf makroskopischer Ebene (z.B. von Randverteilungen) wird im Grenzübergang von unendlich vielen Individuen durch jenes mikroskopische System (z.B. N-Stichproben mit  $N \rightarrow \infty$ ) realisiert, welches unter der gegebenen Beobachtung "maximale Wahrscheinlichkeit" besitzt.<sup>22</sup>

---

<sup>22</sup> Vergleiche Schrödinger 1931 und Lanford 1973.

Dieses Prinzip bedeutet, dass diejenige Einkommensgeschichte bestimmt werden soll, welche die Kontinuitätsrestriktionen erfüllt und aus der Perspektive des Modells über die grösste Realisierungswahrscheinlichkeit verfügt.<sup>23</sup>

Wie schon erwähnt impliziert das Gesetz der grossen Zahlen, dass die Realisationswahrscheinlichkeit jeder die Kontinuitätsrestriktionen erfüllenden Einkommensgeschichtematrix aus dem Blickwinkel der Hypothese gegen 0 tendiert, wenn  $N$  gegen unendlich strebt:

$$\Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}}) \rightarrow 0, \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Dies deshalb, weil  $\Gamma$  respektive die zugehörige zweidimensionale Dichte  $D$  die Kontinuitätsrestriktionen erfüllt, die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  hingegen nicht. Nichtsdestotrotz existiert eine eindeutige Lösung für das Optimierungsproblem, wenn "maximale Wahrscheinlichkeit" als "verschwinden der Realisationswahrscheinlichkeit mit der langsamsten Rate" interpretiert wird. Es handelt sich hier um ein sogenanntes Argument der *grossen Abweichungen*. Die Rate, mit welcher die Wahrscheinlichkeit (2-4) gegen null strebt, ist durch den Grenzwert von  $(1/N) \cdot \log[\Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}})]$  gegeben.<sup>24</sup> Dieser Grenzwert kann unter Anwendung von Stirling's Formel für Fakultäten grosser Zahlen<sup>25</sup> wie folgt berechnet werden:

$$(2-5) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \log[\Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}})] = -H(D | D_{\text{mod}}) \quad \text{mit} \quad D = \frac{\Gamma}{N}.$$

Die Funktion  $H(D | D_{\text{mod}})$  ist bekannt als *relative Entropie* oder *Kullback-Leibler Divergenz* der zweidimensionalen Dichte  $D$  in Bezug auf die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  und wird folgendermassen definiert:

---

<sup>23</sup> Kapitel I in Ellis (1985) liefert eine Einführung in die Konzepte, welche im folgenden verwendet werden.

<sup>24</sup> Mit  $\log$  ist in dieser Arbeit immer der natürliche Logarithmus gemeint.

<sup>25</sup> Stirling's Formel lautet:  $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot (1 + \varepsilon_n)$  mit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  wenn  $n \rightarrow \infty$ . Die Herleitung des

Grenzwerts (2-5) findet sich in Abschnitt 9.1.2. Aebi (1996) führte den wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz in die mathematische Literatur ein.

$$(2-6) \quad H(D|D_{\text{mod}}) = \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log\left(\frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}}\right) \quad \text{mit} \quad 0 \cdot \log\left(\frac{0}{0}\right) = 0$$

$$\quad \quad \quad \text{und} \quad d_{ij} \cdot \log\left(\frac{d_{ij}}{0}\right) = +\infty .^{26}$$

Die Funktion  $H(D|D_{\text{mod}})$  wird auch Ratenfunktion genannt, da  $\text{Pr}_N(\Gamma|D_{\text{mod}})$  für grosse  $N$  exponentiell mit der durch (2-6) gegebenen Rate gegen 0 konvergiert.

$$(2-7) \quad \text{Pr}_N(\Gamma|D_{\text{mod}}) \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} e^{-N \cdot H(D|D_{\text{mod}})} .$$

Die relative Entropie besitzt die folgenden Eigenschaften:

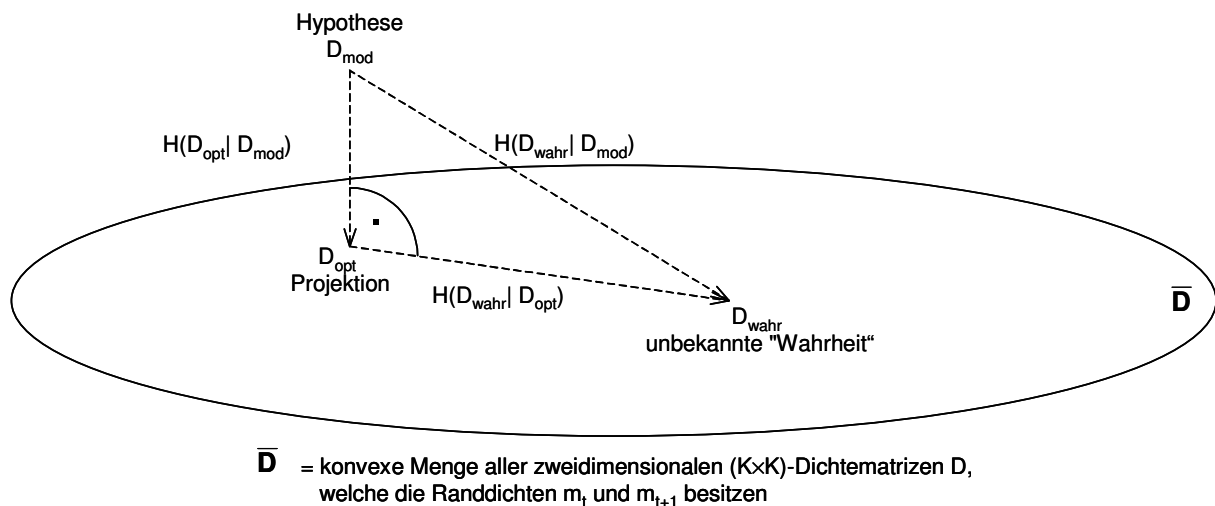
- $H(D|D_{\text{mod}}) \geq 0$  ; nichtnegative Funktion von  $D$ .
- $H(D|D_{\text{mod}}) = 0$  dann und nur dann, wenn  $D = D_{\text{mod}}$  .
- $H(D|D_{\text{mod}})$  ist eine strikt konvexe Funktion von  $D$ .
- $H(D|D_{\text{mod}})$  besitzt ein globales Minimum in  $\bar{D}$  .
- $H(D|D_{\text{mod}}) \neq H(D_{\text{mod}}|D)$  ; keine Symmetrie in den Argumenten.

Da die relative Entropie nicht symmetrisch in ihren Argumenten ist und auch die Dreiecksungleichung verletzt, definiert sie nicht eine eigentliche Metrik im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen.<sup>27</sup> Trotzdem kann der relativen Entropie eine geometrische Interpretation analog der gebräuchlichen euklidischen Distanz gegeben werden. Die Minimierung der relativen Entropie, in Bezug auf eine gegebene zweidi-

<sup>26</sup> Um die relative Entropie zwischen beliebigen Matrizen und einer Hypothese zu berechnen empfiehlt es sich somit, in der hypothetischen Matrix keine Nullelemente zu haben. Befinden sich Nullelemente in der Hypothese, dann muss die optimal angepasste Matrix zwangsläufig an den selben Stellen Nullelemente aufweisen. Ansonsten würde ja die relative Entropie, die durch das Verfahren minimiert wird, unendlich. Um Nullelemente auszuschliessen wurden die empirischen Hypothesen in den Kapiteln 5 und 7 mittels zweidimensionaler Kerndichteschätzung ermittelt.

<sup>27</sup> Weitere Eigenschaften der relativen Entropie und eine tiefere Diskussion ihrer Interpretation finden sich unter anderem in Kullback (1959) und Ellis (1985). Eine Metrik oder Distanzfunktion  $M(\cdot, \cdot)$  ist definitionsgemäss nichtnegativ, symmetrisch, erfüllt die Dreiecksungleichung und hat die Eigenschaft, dass  $M(x,y) = 0$  dann und nur dann, wenn  $x = y$ .

mensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung  $D_{\text{mod}}$ , über einen konvexen Unterraum  $\bar{\mathbf{D}}$  von zweidimensionalen Dichten, kann als Projektion mit ähnlichen Eigenschaften wie Projektionen in euklidischen Räumen angesehen werden (Csiszár 1975). Die relative Entropie verkörpert dabei eine Art "gerichtetes Distanzmass" zwischen zwei Dichten. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2-3 dargestellt.



**Abbildung 2-3:** Die "Geometrie" der Csiszár Projektion

Obschon die relative Entropie keine Metrik definiert, enthält sie eine gewisse "Geometrie", die Analogien zur euklidischen Geometrie besitzt. So erfüllt sie das folgende Analogon zum Theorem von Pythagoras (vergleiche Abbildung 2-3):

$$(2-8) \quad H(D_{\text{wahr}}|D_{\text{mod}}) = H(D_{\text{opt}}|D_{\text{mod}}) + H(D_{\text{wahr}}|D_{\text{opt}}) .$$

Mit  $D_{\text{wahr}}$  wird dabei die wahre, jedoch unbeobachtbare Einkommensdynamik in Form einer zweidimensionalen Dichte bezeichnet.  $D_{\text{wahr}}$  kann durch jedes andere Element von  $\bar{\mathbf{D}}$  ersetzt werden, Gleichung (2-8) ist immer erfüllt.<sup>28</sup> Aus Abbildung 2-3 ist zudem ersichtlich, dass die adjustierte Dynamik  $D_{\text{opt}}$  immer mindestens gleich nah an der unbekanntenen wahren Matrix  $D_{\text{wahr}}$  liegt, wie die Modelldynamik  $D_{\text{mod}}$ .

Die relative Entropie kann als Mass für die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, vom Standpunkt der Hypothese eine Einkommensgeschichtematrix zu beobachten, welche mit den gegebenen Einkommensverteilungen kompatibel ist. Dem Prinzip der

<sup>28</sup> Vergleiche Csiszár (1975) für eine detailliertere Betrachtung.



statistischen Mechanik folgend sollte, unter den Nebenbedingungen der Kontinuitätsrestriktionen, die "wahrscheinlichste" Einkommensgeschichte gewählt werden. Folglich wird das folgende "unterbestimmte, reine Inversenproblem"<sup>29</sup> betrachtet (Golan, Judge und Miller 1996):

Minimiere  $H(D|D_{\text{mod}})$  über alle zweidimensionalen Dichten  $D$  unter den Nebenbedingungen der Kontinuitätsrestriktionen (2-1).

Natürlich enthält die Menge  $\bar{\mathbf{D}}$  aller zweidimensionalen Dichten, welche die Restriktionen (2-1) erfüllen, unendlich viele Elemente. Wird allerdings berücksichtigt, dass  $\bar{\mathbf{D}}$  eine konvexe Menge ist, dann kann die unter den Nebenbedingungen (2-1) wahrscheinlichste zweidimensionale Dichtematrix  $D_{\text{opt}} = (d_{\text{opt}, ij})_{i,j=1,\dots,K}$  eindeutig bestimmt werden als Csiszár-Projektion von  $D_{\text{mod}}$  auf  $\bar{\mathbf{D}}$  (Csiszár 1975). Diese Projektion wird durch Minimierung der relativen Entropie über alle Elemente von  $\bar{\mathbf{D}}$  hinsichtlich  $D_{\text{mod}}$  berechnet. Folglich gilt:

$$(2-9) \quad D_{\text{opt}} = \underset{D \in \bar{\mathbf{D}}}{\operatorname{argmin}} H(D | D_{\text{mod}}) = \underset{D \in \bar{\mathbf{D}}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \left( \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}} \right).$$

Falls das Minimierungsproblem (2-9) lösbar ist, ist die Lösung eindeutig, da die relative Entropie  $H(\cdot|D_{\text{mod}})$  eine nichtnegative und strikt konvexe Funktion ist.

---

<sup>29</sup> In der englischsprachigen Literatur ist das Problem unter der Bezeichnung "ill posed pure inverse problem" bekannt (Golan, Judge und Miller 1996). Zur Verdeutlichung sei das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$(*) \quad y = X \cdot \beta.$$

Um die unbekannte, nicht messbare Grösse  $\beta$  mittels des bekannten linearen Operators  $X$  sowie der messbaren Grösse  $y$  zu bestimmen, müsste die Inverse von  $X$  bestimmt werden ( $\Rightarrow$  Inversenproblem). Da in (\*) kein zufälliger Störterm enthalten ist wird (\*) zum reinen Inversenproblem. Falls die Inverse von  $X$  sich nicht bilden lässt, da das Problem unterbestimmt ist (mehr Unbekannte in  $\beta$  als Restriktionen in  $X$ ), wird (\*) zum unterbestimmten, reinen Inversenproblem. (\*) lässt sich im hier besprochenen Fall aus den Kontinuitätsrestriktionen (2-1) bilden. Dabei sind für  $y$  die beobachteten Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  sowie für  $\beta$  die unbekannte, zu bestimmende zweidimensionale Dichtematrix  $D$  (in Vektorform) zu setzen.

In den Worten der statistischen Literatur muss die minimale Diskriminanzinformation unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  gefunden werden (Kullback 1959, S. 37). Die Lösung wird "minimale Anpassung der Diskriminanzinformation" von  $D_{\text{mod}}$  genannt (Haberman 1984). Konkret führt der Lösungsansatz des Minimierungsproblems (2-9) über die folgende Lagrange-Funktion  $L$ .<sup>30</sup>

$$(2-10) \quad L = \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log\left(\frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}}\right) - \sum_{i=1}^K \lambda_{t,i} \cdot \left(\sum_{j=1}^K d_{ij} - m_{t,i}\right) - \sum_{j=1}^K \lambda_{t+1,j} \cdot \left(\sum_{i=1}^K d_{ij} - m_{t+1,j}\right).$$

Dabei sind  $\lambda_{t,i}$  und  $\lambda_{t+1,j}$  die  $2 \cdot K$  Lagrangemultiplikatoren die mit der Nebenbedingung (2-1) assoziiert sind. Eine Lösung dieses Optimierungsproblems existiert dann und nur dann, wenn zumindest eine Einkommensgeschichte die Kontinuitätsrestriktionen (2-1) erfüllt. Diese Matrix muss zusätzlich mindestens dieselben Kästchen mit Nullen besetzt haben, wie die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  (Csiszár 1975, Korollar 3.3), das heisst, die Lösung muss zur Hypothese absolut stetig sein.<sup>31</sup> Damit das Optimierungsproblem gelöst werden kann, muss  $\bar{\mathbf{D}}$  also zumindest ein zur Hypothese absolut stetiges Element enthalten. Die strikte Konvexität der relativen Entropie impliziert dann die Eindeutigkeit dieser Lösung. Das mit  $D_{\text{opt}}$  bezeichnete Optimum wird durch Differenzierung von (2-10) hinsichtlich  $d_{ij}$  und durch Gleichsetzen der resultierenden Ableitungen mit Null erhalten (Bedingungen erster Ordnung):

$$(2-11) \quad d_{\text{opt},ij} = \phi_{t,i} \cdot d_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} \quad \forall i,j \in \{1, \dots, K\}, \quad \text{mit} \quad \phi_{t,i} = e^{\lambda_{t,i}}$$

$$\text{und} \quad \phi_{t+1,j} = e^{\lambda_{t+1,j} - 1}.$$

---

<sup>30</sup> Die Lösung des Lagrange-Ansatzes wird im Anhang in Abschnitt 9.1.2.4 durchexerziert.

<sup>31</sup> Aus (2-6) geht hervor, dass die relative Entropie aller Matrizen  $D$ , für die dies nicht gilt, den Wert  $+\infty$  annimmt. Damit dies nicht eintritt, muss  $D_{\text{opt}}$  an denselben Stellen Nullelemente aufweisen wie die Hypothese  $D_{\text{mod}}$ . Um eine möglichst günstige und realistische Anpassung an die Beobachtungen zu erhalten ist es somit von Vorteil, die Hypothese so zu generieren, dass sie keine Nullen enthält. Dies erweist sich auch im Hinblick auf die als IPFP (vergleiche Deming und Stephan (1940)) bekannte Lösungsprozedur als nützlich, welche sich dann einfacher implementieren lässt und zudem immer zu einer Lösung führt (Sinkhorn, 1967). Diese iterativ proportionale Anpassungsprozedur wird weiter unten noch genauer erläutert (Abschnitt 2.3.3).

Mit  $\phi_t = (\phi_{t,1}, \dots, \phi_{t,K})'$  und  $\phi_{t+1} = (\phi_{t+1,1}, \dots, \phi_{t+1,K})'$  lässt sich Gleichung (2-11) in Matrixnotation kompakter darstellen:

$$(2-11)' \quad D_{\text{opt}} = \text{diag}(\phi_t) \cdot D_{\text{mod}} \cdot \text{diag}(\phi_{t+1}) .$$

Bei gegebenen beobachteten Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  sowie aus der Sicht der gewählten Hypothese  $D_{\text{mod}}$  entspricht  $D_{\text{opt}}$  der mit der grössten Wahrscheinlichkeit realisierten zweidimensionalen Dichtematrix.  $D_{\text{opt}}$  charakterisiert somit die aus Sicht der Hypothese wahrscheinlichste Schätzung der unbekanntesten wahren Einkommensdynamik.

In der Theorie der Quantenmechanik werden die  $\phi$ 's als *Schrödingermultiplikatoren* bezeichnet. Sie zeigen an wie  $D_{\text{mod}}$ , die Hypothese über die Einkommensdynamik, auf die wahrscheinlichste Weise angepasst werden muss, damit die Kontinuitätsrestriktionen (2-1) erfüllt werden. Die Schrödingermultiplikatoren passen die Wahrscheinlichkeiten  $d_{\text{mod},ij}$  der Hypothese nach unten an, wenn  $\phi_{t,i} \cdot \phi_{t+1,j} < 1$  ist und nach oben, wenn  $\phi_{t,i} \cdot \phi_{t+1,j} > 1$  ist. Die Matrix  $\phi_t \cdot \phi_{t+1}'$  enthüllt somit die Anpassungsmuster und zeigt auf, wie stark das Modell in den entsprechenden Zellen fehlspezifiziert ist. Zudem beinhalten die Schrödingermultiplikatoren eine Art zeitliche "Separabilitätseigenschaft" weil die  $\phi_{t,i}$  nur mit der Anfangsverteilung  $m_t$  und die  $\phi_{t+1,j}$  nur mit der Endverteilung  $m_{t+1}$  verknüpft sind (vgl. die Gleichungen (2-10) und (2-11)). Die relative Grösse von  $\phi_t$  und  $\phi_{t+1}$  zeigt auf, ob die Fehlspezifikation eher durch die Anfangs- oder die Endrestriktion verursacht wird.

Die Schrödingermultiplikatoren werden durch Differenzieren von  $L$  (Gleichung (2-10)) nach den Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{t,i}$  respektive  $\lambda_{t+1,j}$  und anschliessendem Nullsetzen der daraus folgenden Ableitungen gewonnen. Das resultierende Gleichungssystem wird Schrödinger-System genannt:

$$(2-12) \quad m_{t,i} = \phi_{t,i} \cdot \mu_{t,i} \sum_{j=1}^K p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} = \phi_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K d_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} \quad \forall i = 1, \dots, K$$

$$m_{t+1,j} = \left( \sum_{i=1}^K \phi_{t,i} \cdot \mu_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij} \right) \cdot \phi_{t+1,j} = \left( \sum_{i=1}^K \phi_{t,i} \cdot d_{\text{mod},ij} \right) \cdot \phi_{t+1,j} \quad \forall j = 1, \dots, K .$$

Dieses Gleichungssystem zeigt auf, dass die Schrödingermultiplikatoren nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt sind. Im folgenden werden die  $\phi$ 's so festgelegt, dass  $\phi_{t,1} = \phi_{t+1,1}$ .

In der Ökonomie ist es geläufiger und praktischer, mit Übergangsmatrizen anstelle von zweidimensionalen Dichten zu arbeiten. Die Anpassungsgleichung (2-11) lässt sich im Sinne der aus der Sicht der Hypothese wahrscheinlichsten Übergangsmatrix  $P_{\text{opt}} = (p_{\text{opt},ij})_{i,j=1,\dots,K}$  umformulieren. Bei gegebener Anfangsverteilung  $m_t$  sind die Elemente der zweidimensionalen Dichte und der zugehörigen Übergangsmatrix über die Relation  $d_{\text{opt},ij} = m_{t,i} \cdot p_{\text{opt},ij}$  verbunden. Die Elemente von  $P_{\text{opt}}$  lassen sich deshalb wie folgt aus der Hypothese  $P_{\text{mod}}$  ableiten:

$$(2-13) \quad p_{\text{opt},ij} = \frac{d_{\text{opt},ij}}{m_{t,i}} = \frac{\phi_{t,i} \cdot d_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j}}{\phi_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K d_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j}} = \frac{\phi_{t,i} \cdot \mu_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j}}{\phi_{t,i} \cdot \mu_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j}} = \frac{p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j}}{\sum_{j=1}^K p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j}} .$$

In Matrixnotation wird Gleichung (2-13) kompakter zu:

$$(2-13)' \quad P_{\text{opt}} = \left( \text{diag}(\tilde{\phi}_{t+1}) \right)^{-1} \cdot P_{\text{mod}} \cdot \text{diag}(\phi_{t+1}) ,$$

$$\text{mit } \tilde{\phi}_{t+1} = \left( \sum_{j=1}^K p_{\text{mod},1j} \cdot \phi_{t+1,j}, \dots, \sum_{j=1}^K p_{\text{mod},Kj} \cdot \phi_{t+1,j} \right)' .$$

Dabei erfüllt  $P_{\text{opt}}$  die Definition einer Übergangsmatrix, das heisst  $p_{\text{opt},ij} \geq 0$  und  $\sum_{j=1}^K p_{\text{opt},ij} = 1$  für alle  $i$ . Zudem wird  $P_{\text{opt}}$  aus  $P_{\text{mod}}$  lediglich unter Einsatz der Schrödingermultiplikatoren  $\phi_{t+1,j}$ , welche nur mit den Endrestriktionen verknüpft sind, abgeleitet. Die Anpassungsfaktoren entsprechen nun  $(\tilde{\phi}_{t+1}^{-1} \cdot \phi_{t+1,j})_{i,j}$ . Wie bei der zweidimensionalen Dichte wird auch die optimal angepasste Übergangsmatrix  $P_{\text{opt}}$  durch Multiplikation jedes  $p_{\text{mod},ij}$  mit dem entsprechenden Anpassungsfaktor erhalten.

### 2.3.3 Iterativ proportionale Anpassungsprozedur (IPFP)

Die optimal angepasste Dynamik  $D_{\text{opt}}$  liesse sich direkt als Lösung des Minimierungsproblems (2-9) unter den Nebenbedingungen (2-1) mittels numerischer Optimierungstechniken berechnen. Einfacher zu implementieren ist jedoch die in der Literatur als *iterativ proportionale Anpassungsprozedur* (iterative proportional fitting procedure, IPFP) bekannte Methode. Hierbei wird die Berechnung von  $D_{\text{opt}}$  als Schätzung der Zellwahrscheinlichkeiten einer  $(K \times K)$ -Kontingenztafel interpretiert, von der die Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  bekannt und gegeben sind. Diese Problematik wurde zuerst von Deming und Stephan (1940) behandelt. Sie schlugen zur Lösung des Optimierungsproblems die IPFP-Prozedur vor. Es handelt sich dabei um ein iteratives Vorgehen:

1. Zunächst wird der Vektor  $\theta_t$  aus der elementweise durch  $\mu_t$ , den Vektor der Zeilensummen von  $D_{\text{mod}}$ , dividierten beobachteten Anfangsverteilung  $m_t$  gebildet.
2. Nun wird die erste Schätzung von  $D_{\text{opt}}$  gemäss  $D_1 = \text{diag}(\theta_t) \cdot D_{\text{mod}}$  berechnet. Das Resultat  $D_1$  besitzt somit mit  $m_t$  identische Zeilensummen.
3. Von  $D_1$  werden nun die Spaltensummen  $\mu_{t+1}$  und der Vektor  $\theta_{t+1}$  der elementweise durch  $\mu_{t+1}$  dividierten Endverteilung  $m_{t+1}$  gebildet.
4. Die zweite Schätzung von  $D_{\text{opt}}$  wird gemäss  $D_2 = D_1 \cdot \text{diag}(\theta_{t+1})$  bestimmt.  $D_2$  besitzt somit mit  $m_{t+1}$  übereinstimmende Spaltensummen.
5. Analog zu Schritt 1 werden wiederum  $\mu_t$  und  $\theta_t$  gebildet, wobei  $\mu_t$  jetzt dem Vektor der Zeilensummen von  $D_2$  entspricht. Konkret werden die Schritte 1 bis 4 mit der jeweils auf der vorangehenden Stufe berechneten zweidimensionalen Dichte so oft wiederholt, bis Konvergenz eintritt.

Sinkhorn (1967, 1964) hat bewiesen, dass dieser Prozess des alternierenden Anpassens von Zeilen- und Spaltensummen einer positiven Matrix  $X$  an vorgegebene Zeilen- respektive Spaltentotale gegen eine positive Matrix  $X^* = \Delta_1 \cdot X \cdot \Delta_2$  konvergiert, wobei  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  Diagonalmatrizen sind. Er hat zudem bewiesen, dass diese Konvergenz eindeutig ist sowie dass die beiden Diagonalmatrizen, bis auf eine multiplikative Konstante, eindeutig bestimmt sind.

In die hier verwendete Sprache übertragen konvergiert die auf  $D_{\text{mod}}$  angewandte IPFP-Prozedur gegen die Matrix  $\text{diag}(\phi_t) \cdot D_{\text{mod}} \cdot \text{diag}(\phi_{t+1})$ , welche gemäss (2-11)' mit der gesuchten Lösung  $D_{\text{opt}}$  des Minimierungsproblems (2-9) identisch ist.<sup>32</sup> Die Konvergenz des IPFP-Prozederes ist also für positive zweidimensionale Dichten  $D_{\text{mod}}$  sichergestellt. Dies impliziert, dass in  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu_t) \cdot P_{\text{mod}}$  sowohl die hypothetische Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  als auch die für die Hypothese gewählte Anfangsverteilung  $\mu_t$  positiv sein müssen, damit Konvergenz der IPFP-Methode garantiert werden kann. Dabei ist  $\mu_t \gg 0$  für die Konvergenz zwingend. Ist zum Beispiel das  $i$ 'te Element von  $\mu_t$  ein Nullelement, dann enthält die  $i$ 'te Zeile der hypothetischen zweidimensionalen Dichte  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu_t) \cdot P_{\text{mod}}$  lauter Nullen. Da es deshalb in Schritt 1 der IPFP-Prozedur zu einer Division durch 0 kommt, bricht diese dort ab. Für die hypothetische Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  ist Positivität für die Konvergenz nicht zwingend. Für breiter gefasste Klassen wie zum Beispiel den primitiven oder den irreduziblen Übergangsmatrizen lassen sich jedoch immer Beispiele finden, für welche die Methode nicht konvergiert.<sup>33</sup> Bei der für empirische Untersuchungen sinnvollen Einschränkung auf die Klasse der primitiven Übergangsmatrizen sind diese Beispiele jedoch so gesucht und praxisfremd, dass im allgemeinen davon ausgegangen werden kann, dass die IPFP-Prozedur bei praktischen Anwendungen konvergiert.

Es kann gezeigt werden, dass die IPFP-Prozedur geometrisch konvergiert, dass sie die besten asymptotisch normalverteilten (BAN) Schätzer liefert, dass diese äquivalent zu Maximum-Likelihood-Schätzern sind und dass diese Schätzer die relative Entropie (2-6) minimieren (Smith 1947, Ireland und Kullback 1968).

---

<sup>32</sup> Verglichen mit Sinkhorn (1967, 1964) gelten die Analogien  $\Delta_1 = \text{diag}(\phi_t)$  und  $\Delta_2 = \text{diag}(\phi_{t+1})$ .

<sup>33</sup> Bei irreduziblen Übergangsmatrizen kann jeder Zustand von allen Einkommensklassen aus erreicht werden. Bei der Teilmenge der primitiven Transitionsmatrizen  $P$  existiert eine natürliche Zahl  $m$  so, dass  $P^m$  positiv wird. Dies gilt dann auch für alle natürlichen Zahlen welche grösser als  $m$  sind. Es gilt der folgende Zusammenhang der erwähnten Klassen von Transitionsmatrizen: positive Übergangsmatrizen  $\subset$  primitive Übergangsmatrizen  $\subset$  irreduzible Übergangsmatrizen.

## 2.4 WAHL DER BESTMÖGLICHEN HYPOTHETISCHEN DICHEMATRIX

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass die Wahl für die hypothetische Markovkette in Form der zugehörigen Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  getroffen wurde. Wie in Abschnitt 2.3 erwähnt worden ist, existieren zu einer gegebenen Übergangsmatrix unendlich viele zweidimensionale Dichtematrizen, welche als Ausgangslage für die Bestimmung der optimal angepassten Dynamik  $D_{\text{opt}}$  respektive die zugehörige Transitionsmatrix  $P_{\text{opt}}$  benutzt werden könnten. All diese hypothetischen, zu einer gegebenen Modelldynamik  $P_{\text{mod}}$  gehörigen Dichtematrizen bilden eine konvexe Menge, welche mit  $\bar{D}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}})$  bezeichnet sei:<sup>34</sup>

$$\bar{D}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}}) = \{D_{\text{mod}} \mid D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu) \cdot P_{\text{mod}} \quad \text{und} \quad \mu \gg 0\}.$$

Es stellen sich nun die folgenden Fragen:

- Wie wirkt sich, bei gegebener hypothetischer Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$ , die Wahl der arbiträren Anfangsverteilung  $\mu_t$  und somit der hypothetischen zweidimensionalen Dichte  $D_{\text{mod}}$  auf die resultierende adjustierte Dynamik  $D_{\text{opt}}$  aus?
- Lässt sich dieses Unbestimmtheitsproblem überhaupt auf befriedigende Art lösen und wenn ja, wie muss dazu vorgegangen werden?

Um diese Fragestellungen zu beantworten wird zunächst die Optimierungsgleichung (2-9) wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} D_{\text{opt}} &= \underset{D \in \bar{D}}{\text{argmin}} \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log\left(\frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}}\right) = \underset{D \in \bar{D}}{\text{argmin}} \sum_{i,j=1}^K m_{t,i} \cdot p_{ij} \cdot \log\left(\frac{m_{t,i} \cdot p_{ij}}{\mu_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij}}\right) \\ &= \underset{D \in \bar{D}}{\text{argmin}} \sum_{i,j=1}^K m_{t,i} \cdot p_{ij} \cdot \left( \log\left(\frac{p_{ij}}{p_{\text{mod},ij}}\right) + \log\left(\frac{m_{t,i}}{\mu_{t,i}}\right) \right) \\ &= \underset{D \in \bar{D}}{\text{argmin}} \left[ \sum_{i,j=1}^K m_{t,i} \cdot p_{ij} \cdot \log\left(\frac{p_{ij}}{p_{\text{mod},ij}}\right) + \sum_{i,j=1}^K m_{t,i} \cdot p_{ij} \cdot \log\left(\frac{m_{t,i}}{\mu_{t,i}}\right) \right] \end{aligned}$$

---

<sup>34</sup> Ein Beweis der Konvexität von  $\bar{D}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}})$  findet sich im Appendix in Abschnitt 9.1.2.2.

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{argmin}_{D \in \bar{D}} \left[ \sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot \log \left( \frac{p_{ij}}{p_{\text{mod},ij}} \right) + \sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \log \left( \frac{m_{t,i}}{\mu_{t,i}} \right) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^K p_{ij}}_{=1} \right] \\
&= \operatorname{argmin}_{D \in \bar{D}} \left[ \sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot \log \left( \frac{p_{ij}}{p_{\text{mod},ij}} \right) + \underbrace{\sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \log \left( \frac{m_{t,i}}{\mu_{t,i}} \right)}_{\text{konstant f\u00fcr die gew\u00e4hlte Hypothese } D_{\text{mod}}} \right] \\
&= \operatorname{argmin}_{D \in \bar{D}} \sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot \log \left( \frac{p_{ij}}{p_{\text{mod},ij}} \right) \\
&= \operatorname{argmin}_{D \in \bar{D}} \sum_{i,j=1}^K m_{t,i} \cdot p_{ij} \cdot \log \left( \frac{m_{t,i} \cdot p_{ij}}{m_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij}} \right) \\
&= \operatorname{argmin}_{D \in \bar{D}} \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \left( \frac{d_{ij}}{m_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij}} \right)
\end{aligned}$$

F\u00fcr jede hypothetische \u00dcbergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  folgt somit, dass es f\u00fcr die Berechnung der optimal adjustierten zweidimensionalen Dichte  $D_{\text{opt}}$  nicht von Belang ist, mit welcher Anfangsverteilung  $\mu_t$  die hypothetische Dichtematrix  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu_t) \cdot P_{\text{mod}}$  generiert wird. Deshalb kann ohne weiteres, anstelle einer beliebigen Randverteilung  $\mu_t$ , die beobachtete Anfangsverteilung  $m_t$  zur Erstellung der Hypothese benutzt werden. Die so generierte Hypothese sei mit  $D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_t) \cdot P_{\text{mod}}$  bezeichnet. F\u00fcr alle zweidimensionalen Dichten  $D_{\text{mod}}$ , welche aus der Dynamik  $P_{\text{mod}}$  generiert werden k\u00f6nnen, folgt die identische Optimierungsgleichung gem\u00e4\u00df:

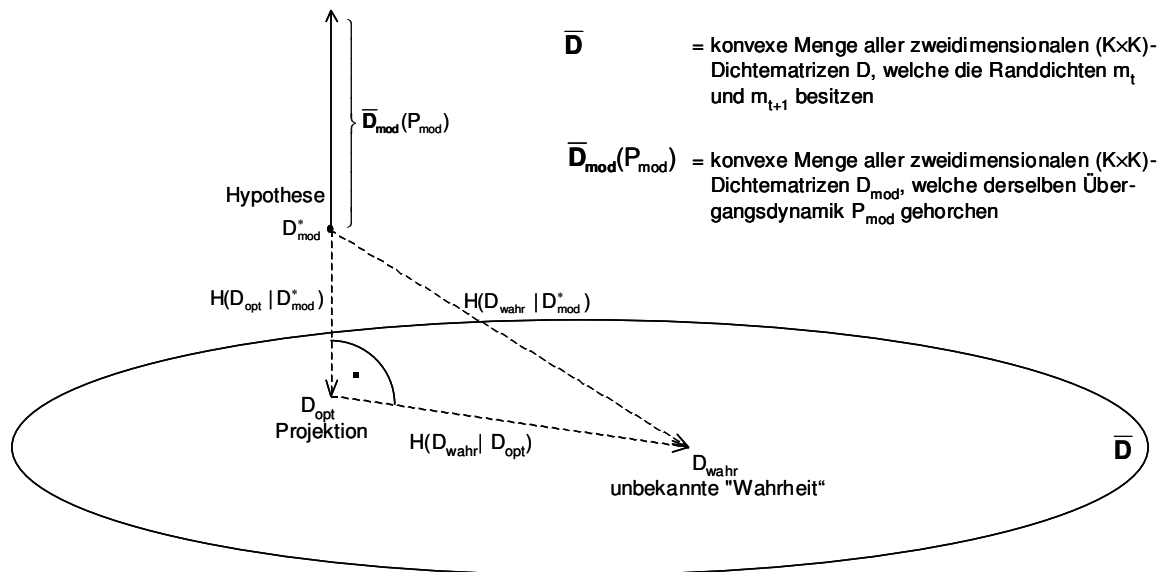
$$(2-14) \quad D_{\text{opt}} = \operatorname{argmin}_{D \in \bar{D}} \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \left( \frac{d_{ij}}{m_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij}} \right) = \operatorname{argmin}_{D \in \bar{D}} \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \left( \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},i}^*} \right).$$

Wird dieses Erkenntnis f\u00fcr die Berechnung der relativen Entropie von beliebigen, aus der gegebenen hypothetischen \u00dcbergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  erstellten Modelldichten  $D_{\text{mod}}$  angewandt, so folgt dass  $D_{\text{mod}}^*$  von allen Elementen der Menge  $\bar{D}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}})$  die geringste relative Entropie aufweist:



$$\begin{aligned}
 (2-15) \quad H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}) &= \sum_{i,j=1}^K d_{\text{opt},ij} \cdot \log\left(\frac{d_{\text{opt},ij}}{d_{\text{mod},ij}}\right) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\text{opt},ij} \cdot \log\left(\frac{p_{\text{opt},ij}}{p_{\text{mod},ij}}\right)}_{\text{konstant f\u00fcr alle } D_{\text{mod}} \in \bar{D}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}})} + \underbrace{\sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \log\left(\frac{m_{t,i}}{\mu_{t,i}}\right)}_{\geq 0}.
 \end{aligned}$$

Der rechte Term in Dekomposition (2-15) entspricht der relativen Entropie  $H(m_t|\mu_t)$  der beobachteten Anfangsverteilung  $m_t$  hinsichtlich der Anfangsverteilung  $\mu_t$  der gew\u00e4hlten Hypothese. Diese wird nat\u00fcrlich dann und nur dann gleich 0 und somit minimal, wenn  $\mu_t$  gleich der beobachteten Anfangsverteilung  $m_t$  gesetzt wird. Dieses Vorgehen minimiert zugleich die relative Entropie \u00fcber alle Vertreter der Familie der hypothetischen zweidimensionalen Dichten  $D_{\text{mod}}$ , welche aus der \u00dcbergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  generiert werden k\u00f6nnen. Somit minimiert das Element  $D_{\text{mod}}^*$  die relative Entropie. Diese Zusammenh\u00e4nge sind in Abbildung 2-4 veranschaulicht.



**Abbildung 2-4:** Optimierungsproblem aller aus derselben \u00dcbergangsdynamik  $P_{\text{mod}}$  generierbaren Hypothesen

Es erscheint somit am vern\u00fcftigsten, die Modelldynamik in einem zweistufigen Verfahren wie folgt zu bestimmen:

1. Erstellen einer gut begr\u00fcndbaren hypothetischen \u00dcbergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$ . Am besten geeignet sind hier nat\u00fcrlich empirisch hergeleitete Transitionsmatrizen

(vergleiche Kapitel 5 und 7). Solche empirischen Modelle sind allerdings nur dann verfügbar, wenn für das betrachtete Problem Paneldaten existieren. Theoretisch hergeleitete Modelle werden immer a priori anfechtbar sein. In Anbetracht der Tatsache, dass Datenpanels häufig nicht existieren, erscheinen theoriebasierte Modelle jedoch als zukunftssträchtige Alternative, da sie äusserst flexibel anwendbar sind und immer zur Verfügung stehen (Kapitel 6).

2. Vormultiplizieren dieses Modells mit der Diagonalmatrix aus der beobachteten Anfangsverteilung gemäss  $D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_t) \cdot P_{\text{mod}}$ .

## 2.5 STATISTISCHE SCHLÜSSE

Aus einem statistischen Blickwinkel besteht, neben der optimalen Anpassung des Modells an die Daten, auch ein Interesse daran, ob diese Anpassungen statistisch signifikant sind. Ireland und Kullback (1968) zeigen auf, wie die notwendige Anpassung der Hypothese an die beobachteten Querschnittsverteilungen auf statistische Signifikanz getestet werden kann. Wird die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  direkt aus einer Stichprobe von  $n$  Individuen<sup>35</sup> generiert, dann ist die Statistik

$$(2-16) \quad 2 \cdot n \cdot H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}) \sim \chi_{2K-2}^2$$

asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $2 \cdot K - 2$  Freiheitsgraden. Gemäss Ireland und Kullback ist die Zahl der Freiheitsgrade durch die Differenz zwischen der Anzahl Freiheitsgrade des unrestringierten Modells  $D_{\text{mod}}$  ( $K^2 - 1$ ) und des restringierten Modells  $D \in \bar{\mathbf{D}}$  ( $(K^2 - 1) - (2 \cdot K - 2)$ ) gegeben. Deshalb entspricht die Anzahl Freiheitsgrade der Anzahl der in (2-1) auferlegten Restriktionen.<sup>36</sup>

Wird die hypothetische Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  aus einer Stichprobe von  $n$  Individuen generiert, die hypothetische zweidimensionale Dichte dann jedoch gemäss

---

<sup>35</sup> In Kapitel 5 und 7 entstammen die Hypothesen  $D_{\text{mod}}$  der "Panel Study of Income Dynamics" (PSID, Datenpanel für die USA) und  $n$  entspricht der Anzahl aus diesem Panel extrahierter Individuen.

<sup>36</sup> Dasselbe Resultat kann dadurch erzielt werden indem erkannt wird, dass (2-10) der Neyman-Pearson Statistik unter den Restriktionen (2-1) entspricht (vergleiche Billingsley 1961, Kapitel 5).

$D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_t) \cdot P_{\text{mod}}$  unter Einbezug der als beobachtet vorausgesetzten wahren Anfangsverteilung erstellt, dann ist die Teststatistik

$$(2-17) \quad 2 \cdot n \cdot H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}^*) \sim \chi_{K-1}^2$$

asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $K - 1$  Freiheitsgraden. Auch hier lässt sich die Anzahl Freiheitsgrade als Differenz zwischen unrestringiertem und restringiertem Modell ermitteln. So ist die Anzahl Freiheitsgrade des unrestringierten Modells  $D_{\text{mod}}^*$  gegeben durch  $(K^2 - 1) - (K - 1) = K^2 - K$ . Die Anzahl Freiheitsgrade des restringierten Modells  $D \in \bar{\mathbf{D}}$  beträgt  $(K^2 - 1) - (2 \cdot K - 2) = K^2 - 2 \cdot K + 1$ . Somit resultieren  $K - 1$  Freiheitsgrade für die Teststatistik (2-17).

Diese Statistiken können dazu verwendet werden, die durch das gewählte Modell  $D_{\text{mod}}$  respektive  $D_{\text{mod}}^*$  gegebene Nullhypothese zu testen.

## 2.6 SCHLUSSBETRACHTUNGEN

In diesem Kapitel wurde aufgezeigt, wie die vorgeschlagene Methode der Minimierung der relativen Entropie optimal dazu geeignet ist, aus Einkommensquerschnitten Information über die Dynamik des Einkommensprozesses zu extrahieren. Dazu wird der Einkommensprozess in Form von Übergangsmatrizen als zeitinvariante Markovkette zu diskreten Zeitpunkten modelliert. Neben den beobachteten Einkommensverteilungen zu zwei Zeitpunkten wird für die Anwendung der propagierten Methode noch eine ursprüngliche Hypothese über die Einkommensdynamik in Form einer Übergangsmatrix benötigt. Diese Hypothese kann empirischen Beobachtungen (vergleiche Kapitel 5 und 7) respektive theoretischen Überlegungen (vergleiche Kapitel 6) entstammen. Die vorgeschlagene Methode beruht auf der Minimierung der relativen Entropie hinsichtlich der gewählten Hypothese unter der Nebenbedingung der beobachteten Einkommensverteilungen. Diese Optimierung führt zu einer Übergangsmatrix, welche im Sinne der relativen Entropie den geringstmöglichen Abstand zur ursprünglichen Hypothese hat, jedoch mit den beobachteten Randverteilungen kompatibel ist. Die resultierenden, notwendigen Anpassungen der Hypothese können als sogenannte Schrödingermultiplikatoren ausgedrückt werden. Der vorgestellte

Ansatz kann deshalb als Fehlspezifikationsanalyse im Sinne von White (1994) aufgefasst werden.

In der Literatur werden auch einige alternative Methoden zur Extraktion von Informationen über Übergangsmatrizen aus Querschnittsdaten vorgeschlagen.<sup>37</sup> Der hier vorgestellte Ansatz der Minimierung der relativen Entropie beinhaltet jedoch einige gewichtige Vorteile:

- Da die Einkommensverteilung nur zu zwei Zeitpunkten betrachtet wird, gibt es mehr unbekannte Elemente ( $K^2 - 1$ ) in der zweidimensionalen Dichte  $D$  als unabhängige Beobachtungen ( $2 \cdot K - 2$ ) in Form der Anfangs- und der Endverteilung. Es liegt deshalb ein "unterbestimmtes, reines Inversenproblem" vor, welches die Anwendung der Kleinstquadrat-Schätzung nicht zulässt. In dieser Situation bietet sich das Prinzip der maximalen Entropie als natürliches Kriterium an (Golan, Judge und Miller 1996).<sup>38</sup>
- Der Ansatz garantiert zusammen mit der IPFP-Prozedur, dass die resultierenden optimal angepassten Matrizen  $D_{\text{opt}}$  und  $P_{\text{opt}}$  automatisch zweidimensionale Dichten respektive Übergangsmatrizen sind. Somit können mühsame Minimierungsprobleme unter Nebenbedingungen vermieden werden.
- Obwohl der Ansatz die Spezifizierung einer Hypothese  $D_{\text{mod}}$  verlangt, ist dies nicht restriktiv. Werden nämlich alle Elemente von  $D_{\text{mod}}$  gleich  $1/K^2$  gesetzt, resultiert eine Hypothese ohne jegliche vorgängige Information (non-informative prior).
- Die Minimierung der relativen Entropie lässt sich durch die iterativ proportionale Anpassungsprozedur IPFP einfach implementieren und erweist sich als robust.

---

<sup>37</sup> Adelman, Morley, Schenzler und Warning 1994; Golan, Judge und Miller 1996; Kalbfleisch und Lawless 1984; Lee, Judge und Zellner 1970.

<sup>38</sup> Das Prinzip maximaler Entropie respektive die Methode der Minimierung der relativen Entropie kann, wie in diesem Kapitel gezeigt wurde, durch ein probabilistisches Argument basierend auf einem Prinzip grosser Abweichungen hergeleitet werden (vergleiche hierzu auch Abschnitt 9.1 im Anhang sowie Aebi 1996 und Aebi, Neusser und Steiner 1999).

## 3 MESSUNG DER MOBILITÄT<sup>39</sup>

### 3.1 EINLEITUNG

Die Möglichkeit der Bewegung von einem Zustand in einen anderen ist ein wichtiges Charakteristikum eines stochastischen Prozesses. Es ist deshalb kaum überraschend, dass es in der Literatur diverse Versuche gegeben hat, diesen Aspekt mit einer einzigen Zahl, einem sogenannten Mobilitätsindex, zu beschreiben.<sup>40</sup> In diesem Kapitel wird Mobilität, im Sinne von Bartholomew (1982), als Bewegung zwischen unterschiedlichen Einkommensklassen interpretiert.<sup>41</sup> Bei Beschränkung auf zeitlich homogene Markovprozesse und endliche Zustandsräume sind Mobilitätsindices typischerweise als eine Abbildung von der Menge der Übergangsmatrizen auf die reellen Zahlen definiert.

Um aussagekräftige Indices zu definieren, schlug Shorrocks (1978) einen axiomatischen Ansatz vor und postulierte eine Menge wünschenswerter Axiome für Mobilitätsindices. Geweke, Marshall und Zarkin (1986) unterteilten diese Axiome in Persistenz-, Konvergenz- und temporale Aggregationskriterien. Sie zeigten, dass innerhalb der Klasse von Übergangsmatrizen mit reellen, nicht-negativen Eigenwerten alle Persistenz- und Konvergenzkriterien logisch konsistent sind. Obschon diverse Mobilitätsindices innerhalb der Klasse dieser Matrizen mit den Persistenz- und Konvergenzkriterien konsistent sind, existiert jedoch kein Index der mit allen drei Klassen von Kriterien vereinbar ist. In Anbetracht der Tatsache, dass hier der Versuch unter-

---

<sup>39</sup> Dieses Kapitel bezieht sich auf die Arbeit "A Large Deviation Approach to the Measurement of Mobility" von Aebi, Neusser und Steiner (2002 b).

<sup>40</sup> Der Begriff der Mobilität ist von vielseitiger Natur, so dass unterschiedliche Autoren ihn auch aus unterschiedlichen Blickwinkeln betrachten (vergleiche hierzu die Übersichten von Fields und Ok (1999), Maasoumi (1998) oder Trede (1999)).

<sup>41</sup> Alternative Ansätze betrachten Mobilität als Gleichheit der Möglichkeiten (Bénabou und Ok, 2001), wohlfahrtsvergrößernd (Atkinson, 1983; Dardanoni, 1993) oder als ungleichheitsreduzierend (Maasoumi, 1998). Trotzdem diese Ansätze auf unterschiedlichen Konzepten basieren sind sie nicht gänzlich ohne Verbindung zueinander. In Abschnitt 3.3.4 werden einige Relationen des hier vorgestellten Ansatzes zu in der Literatur verankerten Konzepten hergestellt und erläutert.

nommen wird, die in einer Matrix vorhandene Information durch eine einzige Zahl auszudrücken, müssen solche Inkonsistenzen erwartet werden. Offensichtlich beschreiben verschiedene Indices teilweise unterschiedliche Aspekte der Mobilität. Ein illustratives Beispiel zu Inkonsistenzen von Mobilitätsindices, welches auch von Maasoumi (1998) aufgegriffen wurde, findet sich in Dardanoni (1993).

Der in Kapitel 3 vorgestellte Ansatz wird durch die Einsicht motiviert, dass der Begriff der Mobilität durch zwei Aspekte beschrieben werden kann: Mobilität die im Gleichgewichtszustand vorhanden ist und Mobilität welche mit der Konvergenz zum gleichgewichtigen Zustand verbunden ist.<sup>42</sup> Diese Unterscheidung ist essentiell und Forscher sollten sich dieses Sachverhalts bei Studien zur Mobilität bewusst sein. Es wird hier gezeigt, dass konventionelle Mobilitätsindices gemäss den zwei Mobilitätsaspekten in zwei Klassen unterteilt werden können: Gleichgewichts- und Konvergenzindices.<sup>43</sup> Die Tatsache, dass einige der bekannten Indices auf der Gleichgewichtsverteilung basieren, während andere auf den Eigenwerten der zugrundeliegenden Übergangsmatrix aufbauen, dient als Leitlinie zur Unterscheidung der zwei Klassen. Mobilitätsindices der ersten Klasse werden auf der Basis der Gleichgewichtsverteilung definiert. Sie lassen sich als Erwartungswerte von entsprechend definierten Funktionalen, den sogenannten *Mobilitätsfunktionalen*, ausdrücken. Ein Mobilitätsfunktional entspricht einer Gewichtsregel für Bewegungen von einer Einkommensklasse in eine andere. Die Erwartung wird dabei hinsichtlich der invarianten Verteilung des Markovprozesses gebildet. Deshalb werden diese Indices als *Gleichgewichtsindices* bezeichnet. Für monotone Übergangsmatrizen und eine gewisse Klasse von Mobilitätsfunktionalen erweisen sich die Gleichgewichtsindices als konsistent mit Shorrocks' (1987) Monotonie-Axiom, mit Conlisk's (1990) schwachem D-Kriterium wie auch mit Dardanoni's (1993) partieller Ordnungsrelation.

---

<sup>42</sup> In der soziologischen Literatur wird der Aspekt der Mobilität im Gleichgewicht oft mit reiner oder Austauschmobilität (pure oder exchange mobility) bezeichnet. Da sich hier die Querschnittsverteilung nicht mehr ändert, handelt es sich um einen reinen Abtausch von Rängen innerhalb der sozialen Hierarchie.

<sup>43</sup> Anstelle der Gruppierung wünschenswerter Axiome werden hier die Indices im Geiste von Bartholomew (1982) direkt klassiert.

Die Indices der zweiten Klasse werden hinsichtlich des Spektrums der zugrundeliegenden Übergangsmatrix definiert. Da die Eigenwerte dieser Übergangsmatrix mit der Geschwindigkeit verknüpft sind, mit welcher das System gegen seine invariante Verteilung konvergiert, werden diese eigenwertbasierten Indices als *Konvergenzindices* bezeichnet. Die so klassierten Gleichgewichts- und Konvergenzindices korrespondieren mit der von Bartholomew (1982) vorgenommenen Klassifikation von Massen der Bewegung respektive der Generationenabhängigkeit. Obschon der hier vorgestellte Ansatz sich von Bartholomew's Vorgehen unterscheidet, resultiert er in derselben Zusammensetzung der beiden Gruppen.

Im Hinblick auf die hier getroffene Unterscheidung sollten empirische Studien zwischen den beiden Aspekten der Mobilität unterscheiden und idealerweise beide messen. Die Benutzung konventioneller Indices würde eine Vielzahl möglicher Kombinationen von Gleichgewichts- und Konvergenzindices erlauben. Es wird hier gezeigt, dass die freie Wahl je eines Vertreters der beiden Klassen innerhalb einer Menge von Übergangsdynamiken zu unterschiedlichen Rangierungen der Dynamiken hinsichtlich beider Mobilitätsaspekte führen kann. Deshalb wird die Interpretation der Mobilität mit konventionellen Indices ziemlich willkürlich.

Folglich schlägt der hier präsentierte Ansatz ein miteinander verbundenes Paar komplementärer Indices vor, wobei die beiden Teilindices je einen der beiden Mobilitätsaspekte messen. Sie werden als *Gleichgewichts-* und *Periodenindex* bezeichnet. Gleichgewichtsmobilität bezeichnet jenen Teil der Mobilität, der bei Markovprozessen in ihrem Gleichgewicht (ergodischer Zustand) auftritt. Periodenmobilität ist hingegen verbunden mit dem Teil der Mobilität, der mit der Konvergenz des Prozesses gegen sein Gleichgewicht assoziiert ist. Im Unterschied zur Konvergenzmobilität baut die Periodenmobilität jedoch nicht direkt auf dem Spektrum der zugrundeliegenden Übergangsmatrix auf. Faktisch können die beiden Indices nicht unabhängig voneinander gewählt werden, da sie über die Wahl eines Mobilitätsfunktionalis eng miteinander verknüpft sind. Die Wahl des Mobilitätsfunktionalis legt sowohl den Gleichgewichts- als auch den entsprechenden Periodenindex eindeutig und simultan fest. Diese Art des Vorgehens eliminiert somit die oben erwähnte Willkür bei der Auswahl eines Paares konventioneller Indices zur Messung beider Mobilitätsaspekte.

Der *Gleichgewichtsindex* entspricht gerade dem Erwartungswert des Mobilitätsfunktionalen hinsichtlich der invarianten Verteilung des zugrundeliegenden Markovprozesses. Es wird gezeigt, dass bekannte Indices wie Bartholomew's Index oder der Index der unbedingten Wahrscheinlichkeit des Verlassens der gegenwärtigen Klasse (index of unconditional probability of leaving the current class) genau dieser Form entsprechen. Eine Anwendung des ergodischen Theorems impliziert dann, dass das zeitliche Mittel des Mobilitätsfunktionalen auf einem Stichprobenpfad zum vorgeschlagenen Gleichgewichtsindex konvergiert. Unter Verwendung von Techniken grosser Abweichungen wird bewiesen, dass es sich dabei um eine exponentielle Konvergenz handelt und dass die Konvergenzrate durch eine spezifische relative Entropie gegeben ist. Diese Konvergenzrate führt zum vorgeschlagenen Mass der *Periodenmobilität*. Somit misst der Periodenindex die Geschwindigkeit, mit welcher das zeitlich gemittelte Mobilitätsfunktional, wenn man die Zeit gegen Unendlich streben lässt, gegen den korrespondierenden Gleichgewichtsindex konvergiert. Folglich werden durch die Wahl des Mobilitätsfunktionalen sowohl der Gleichgewichts- als auch der Periodenindex simultan festgelegt. Dieses Vorgehen führt zu einer Verbesserung der Interpretierbarkeit und der Vergleichbarkeit empirischer Anwendungen. Die Nützlichkeit dieses Ansatzes wird unter anderen mittels der Beispiele von Dardanoni (1993) aufgezeigt.

Obschon das angewandte Prinzip grosser Abweichungen nur ein Spezialfall einer viel allgemeineren Theorie ist, wird hier eine vollständige Version davon vorgestellt und bewiesen. Dies hat zur Folge dass diese Arbeit in sich geschlossen und deswegen auch für Nichtspezialisten leichter zugänglich ist.<sup>44</sup> Diese umfassende Entwicklung des Prinzips der grossen Abweichungen ermöglicht es, die Theorie voll auf die gewählte Anwendung anzupassen sowie den Boden für numerische Berechnungen zu bereiten.

---

<sup>44</sup> Zhulenev (1999) schreibt zum Beispiel: "... however astonishing, it appears that no simple and understandable monographs allowing a nonspecialist 'to enter' quickly into the theory of type large deviations has appeared during the last 60 years." Der technisch versierte Leser sei auf die Arbeiten von Miller (1961), Iscoe, Ney und Nummelin (1985), Ney und Nummelin (1987a), Ney und Nummelin (1987b) sowie Dembo und Zeitouni (1998) verwiesen.



### 3.2 MOBILITÄT VON MARKOVKETTEN

Um den Begriff der Mobilität zu konkretisieren und die Problematik anzudeuten, welche bei der Definition von Massen zur Bestimmung der Mobilität von Markovprozessen bestehen, wird hier in verkürzter Form der Kern der Diskussion von Bartholomew (1982, Kapitel 2.3) wiedergegeben. Hierzu seien die folgenden drei Übergangsmatrizen gegeben:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } 0 < p < 1 .$$

Die drei Beispielmatrizen repräsentieren drei Gesellschaften, welche in zwei Einkommensklassen unterteilt werden. Ein Mobilitätsmass sollte nun einen Anhaltspunkt über das Ausmass liefern, mit dem sich die Individuen einer Gesellschaft im Zeitablauf zwischen den verschiedenen Einkommensklassen bewegen. Shorrocks (1978) definiert einen Mobilitätsindex als stetige, reellwertige Funktion auf der Menge der Übergangsmatrizen. Ein solcher Index generiert eine Mobilitätsskala auf der reellen Zahlengerade. Neben anderen Axiomen definierte Shorrocks das Normierungsaxiom, welchem ein Mobilitätsmass genügen sollte. Dieses besagt, dass die Mobilitätsskala auf das Intervall  $[0, 1]$  beschränkt sein sollte. Dabei steht der Wert 0 für vollständige Immobilität und der Wert 1 für maximale Mobilität. Da alle gebräuchlichen Mobilitätsindices auf dieses Intervall normiert werden können, wird aus Gründen der Verständlichkeit in diesem Abschnitt davon ausgegangen, dass dieses Axiom erfüllt sei.

Am immobilen Ende der durch ein solches Mobilitätsmass generierten Skala der Mobilität ist die Lage eindeutig. Die Identitätsmatrix  $P_1$  widerspiegelt eine Gesellschaft, in welcher die Individuen im Zeitablauf in ihren Einkommensklassen verharren. In dieser Gesellschaft findet kein Austausch zwischen den Klassen statt, die Individuen sind vollkommen immobil. Jedes Mobilitätsmass muss der Übergangsdynamik  $P_1$  die Mobilität 0 zuordnen.  $P_1$  befindet sich eindeutig am immobilen Ende der Mobilitätsskala.

Diese Eindeutigkeit ist hingegen am mobilen Ende einer Mobilitätsskala nicht gegeben. So repräsentieren die Übergangsdynamiken  $P_2$  und  $P_3$  jeweils einen Mar-

kovprozess am mobilen Ende der Skala. Welche der beiden Matrizen als die mobilste angeschaut wird, hängt davon ab, ob Mobilität als sogenannte Generationenabhängigkeit oder als reine Bewegung betrachtet wird.

### 3.2.1 Masse der Generationenabhängigkeit

Übergangsdynamiken der Form  $P_2$  repräsentieren sogenannt perfekt mobile Gesellschaften (Prais, 1955). Das entscheidende Kriterium solcher Gesellschaften besteht darin, dass die Einkommensklasse der Kinder unabhängig von derjenigen der Eltern ist. Es herrscht also vollständige Chancengleichheit. Allgemein repräsentieren Übergangsmatrizen mit lauter identischen Zeilen solche Gesellschaften. Falls die Messung der Abhängigkeit der Chancen der Kinder von den Einkommensmöglichkeiten der Eltern Ziel einer Untersuchung zur Einkommensmobilität ist, dann befinden sich klarerweise die Transitionsmatrizen  $P_1$  und  $P_2$  an den entgegengesetzten Enden einer Mobilitätsskala. Ein Mobilitätsindex, welcher die Generationenabhängigkeit bewerten soll, muss der Übergangsmatrix  $P_2$  folglich den Wert 1 zuordnen. Bei der Transitionsmatrix  $P_3$  sind die Einkommenschancen der Kinder, genau wie bei der Dynamik  $P_1$ , vollständig durch die Einkommensklassenzugehörigkeit der Eltern determiniert. Unter dem Blickwinkel der Generationenabhängigkeit sind die Dynamiken  $P_1$  und  $P_3$  folglich gleich immobil und müssten den Wert 0 zugeordnet erhalten. Diese Art der Mobilität könnte allgemeiner auch als temporale Abhängigkeit ausgedrückt werden. Bei  $P_2$  herrscht keine, bei  $P_1$  und  $P_3$  dagegen vollständige temporale Abhängigkeit respektive Abhängigkeit des Einkommens der Kinder von demjenigen der Eltern.

### 3.2.2 Masse der Bewegung

Die zweite Bedeutung, in welcher der Begriff der Mobilität benutzt wird, verweist auf das Ausmass an Bewegung, welche zwischen den Einkommensklassen einer Gesellschaft stattfindet. Falls die Bewegungsmobilität Ziel einer Untersuchung ist, dann stellt eindeutig die Übergangsmatrix  $P_3$  das entgegengesetzte Extrem von  $P_1$  dar. Während sich unter Dynamik  $P_1$  niemand bewegt, bewegen sich unter Dynamik  $P_3$  alle. Ein Bewegungs-Mobilitätsindex muss folglich der Dynamik  $P_3$  den Maximalwert

1 zuordnen. Die Transitionsmatrix  $P_2$  befindet sich gemäss dieser Mobilitätsdefinition irgendwo zwischen den beiden Extremen  $P_1$  und  $P_3$ .

### 3.2.3 Zusammenfassende Bemerkungen

In der Praxis wird diese Unterscheidung der Mobilität in Generationenabhängigkeits- und Bewegungsmobilität dadurch etwas verwischt, dass beobachtete Übergangsdynamiken real existierender Gesellschaften immer irgendwo zwischen  $P_1$  und  $P_2$  zu liegen scheinen. Trotzdem sollte man sich bei der Messung von Mobilität wie auch beim Aufstellen von Kriterien, welchen Mobilitätsindices genügen sollten (wie dies Shorrocks (1978) tat), dieser Mehrdeutigkeit der Mobilität bewusst sein und wissen, auf welchen Mobilitätsaspekt gezielt wird.

Im weiteren Verlauf von Kapitel 3 wird Mobilität aufgeteilt in die Aspekte Gleichgewichts- und Konvergenzmobilität. Es zeigt sich, dass diese Einteilung zur selben Gliederung führt, wie sie von Bartholomew (1982) vorgenommen wurde. So fallen die Gleichgewichtsindices in die Klasse der Masse der Bewegung, während Konvergenzindices als Masse der Generationenabhängigkeit betrachtet werden können. Der Ansatz zur Unterteilung in Gleichgewichts- und Konvergenzmobilität unterscheidet sich jedoch von Bartholomew (1982). Er basiert im wesentlichen auf der Beobachtung, dass existierende Mobilitätsmasse entweder auf dem Spektrum der Eigenwerte untersuchter Übergangsdynamiken gründen, oder aber die Mobilität im Gleichgewichtszustand der untersuchten Markovprozesse messen. In Tabelle 3-1 sind einige der am häufigsten verwendeten sowie zwei neue Mobilitätsindices zusammengefasst, eingeteilt in die erwähnten Klassen.

Gleichgewichts-indices	Bartholomew	$\sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot  i-j $
	Quadrierte Distanz <sup>45</sup>	$\sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot (i-j)^2$
	Unbedingte Wahrscheinlichkeit des Verlassens der gegenwärtigen Klasse (Klassenwechsel)	$\frac{K}{K-1} \cdot \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot (1-p_{ii})$
Konvergenzindices	Prais' Index	$\frac{K - \text{Spur}(P)}{K-1}$
	Eigenwertindex	$\frac{K - \sum_{i=1}^K  \lambda_i }{K-1}$
	Index des zweiten Eigenwerts	$1 -  \lambda_2 $
	Asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit <sup>45</sup>	$-\log \lambda_2 $
	Determinantenindex <sup>46</sup>	$1 - \det(P)$

Tabelle 3-1: Einteilung von Mobilitätsindices

### 3.3 GLEICHGEWICHTSINDEX UND EIGENSCHAFTEN

#### 3.3.1 Voraussetzungen, Gleichgewichts- und Konvergenzindices

Im folgenden wird ein zeitlich diskreter, zeitinvarianter stochastischer Prozess  $\{X_t\}$  mit  $t = 0, 1, 2, \dots$  betrachtet. Die Zufallsvariablen  $X_t$  nehmen Werte innerhalb eines endlichen Zustandsraums  $Z = \{1, 2, \dots, K\}$  an. Es wird angenommen, dass  $\{X_t\}$  für irgend eine willkürliche Anfangsverteilung  $\mu$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Markovkette mit einer  $(K \times K)$ -Übergangsmatrix  $P = (p_{ij})_{i,j=1, \dots, K}$  ist. Das durch die Markovkette induzierte Mass auf der Menge der Einkommenspfade  $Z^\infty$  wird mit  $\mathbf{P}_\mu$  bezeichnet.<sup>47</sup> Wie allgemein in

<sup>45</sup> Der Index der quadrierten Distanz wird hier aufgrund eines Referereports zu Aebi, Neusser und Steiner (2002 b) aufgeführt. Sowohl dieser Index als auch der Index der asymptotischen Konvergenzgeschwindigkeit sind neu in der Literatur.

<sup>46</sup> Dabei ist  $\det(P)$  die Determinante der Übergangsmatrix  $P$ .

<sup>47</sup> Wenn dadurch keine Missverständnisse entstehen und um die Notation zu vereinfachen wird der Index, welcher auf die Anfangsverteilung verweist, manchmal weggelassen.

der Literatur über Mobilitätsindices angenommen, wird auch hier davon ausgegangen, dass die Übergangsmatrix  $P$  irreduzibel ist. Zusätzlich wird die Annahme getroffen, dass die Spur von  $P$  strikt positiv ist, das heisst, es existiert mindestens ein Diagonalelement  $p_{ii} > 0$ ,  $i \in \{1, \dots, K\}$ . Diese Zusatzannahme hat zur Folge, dass die Transitionsmatrix  $P$  primitiv ist (Berman und Plemmons (1994), Korollar 2.2.28, S.34), was seinerseits impliziert, dass die Markovkette  $\mathbf{P}_\mu$  regulär ist.<sup>48</sup> Unter diesen Annahmen ist sichergestellt, dass im Zeitablauf jeder Zustand erreichbar ist, egal aus welchem Zustand gestartet wurde. Es ist also für alle Individuen möglich, sich in jede der  $K$  Einkommensklassen zu entwickeln. Die Primitivität der Übergangsmatrix  $P$  respektive die Regularität der Markovkette implizieren die Existenz einer eindeutigen, invarianten, gleichgewichtigen respektive ergodischen Verteilung  $\pi$  sowie das Vorhandensein der Grenzwerte

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu' \cdot P^T = \pi' \quad \text{für alle Anfangsverteilungen } \mu, \quad \text{respektive} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P^T = \Pi.$$

Dabei entspricht  $\Pi$  der Übergangsmatrix, in deren Zeilen die Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  von  $P$  steht.

Ein stochastischer Prozess generiert auch im Gleichgewicht Bewegung zwischen den Zuständen. Diese Mobilität kann als Erwartungswert eines Mobilitätsfunktional<sup>49</sup> aufgefasst werden, wobei der Erwartungswert hinsichtlich der Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  gezogen wird. Diese auf der gleichgewichtigen Verteilung  $\pi$  basierenden Mobi-

---

<sup>48</sup> Bei einer primitiven Matrix  $P$  existiert eine ganze Zahl  $m$  so, dass  $P^m \gg 0$  ist. Die kleinste positive ganze Zahl  $m$  mit  $P^m \gg 0$  wird Index der Primitivität der primitiven Matrix  $P$  genannt. Für alle ganzen Zahlen grösser diesem Index  $m$  gilt der Zusammenhang natürlich auch. Im Übrigen wird für Matrizen die folgende Notation verwendet:  $A \geq B$  falls  $a_{ij} \geq b_{ij}$  für alle  $i$  und  $j$ ;  $A > B$  falls  $A \geq B$  und  $A \neq B$ ;  $A \gg B$  falls  $a_{ij} > b_{ij}$  für alle  $i$  und  $j$ .

<sup>49</sup> Ein Mobilitätsfunktional ist eine Art Bewertungsschema und kann als  $(K \times K)$ -Matrix dargestellt werden. Es bewertet Bewegungen zwischen den Einkommensklassen mit positiven Gewichten, während das Verharren in einer Einkommensklasse das Gewicht 0 erhält. Mit anderen Worten wird die Hauptdiagonale einer Übergangsmatrix mit dem Gewicht 0 versehen, während die restlichen Matrixelemente positive Gewichte erhalten. Die Höhe dieser Gewichte ist Ermessenssache und hängt auch von den Zielen einer Forschungsarbeit ab. Die Definition von Mobilitätsfunktionalen findet sich in Abschnitt 3.3.2.

litätsindices werden deshalb als *Gleichgewichtsindices* bezeichnet (vergleiche hierzu Abschnitt 3.3.2).

Jede primitive Übergangsmatrix  $P$  der Dimension  $K$  besitzt  $K$  Eigenwerte  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, K\}$ . Zudem ist der Spektralradius  $\rho(P) = \lambda_1 = 1$  jeder primitiven Übergangsmatrix  $P$ , das heisst ihr grösster Eigenwert, eindeutig. Folglich sind alle anderen Eigenwerte von  $P$  betragsmässig kleiner als 1.<sup>50</sup> Im folgenden wird davon ausgegangen, dass die Eigenwerte der Grösse ihres Betrags nach geordnet sind:

$$\lambda_1 = 1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_K| \geq 0 .$$

Die Geschwindigkeit, mit der  $P^T$  für  $T \rightarrow \infty$  gegen  $\Pi$  konvergiert, hängt von den Eigenwerten mit Betrag kleiner 1 ab, das bedeutet von  $\lambda_2, \dots, \lambda_K$ . Jedem Eigenwert sind ein linker  $\ell_i$  sowie ein rechter Eigenvektor  $r_i$  zugeordnet. Die gleichgewichtige Verteilung  $\pi$  entspricht dem auf 1 normierten linken Eigenvektor  $\ell_1$  zum grössten Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ . Die resultierende Verteilung nach  $T$ -facher Anwendung der Übergangsmatrix  $P$  auf die Anfangsverteilung  $\mu$  setzt sich aus den Einflüssen der verschiedenen Eigenvektoren zusammen, welche sich jedoch mit der  $T$ -ten Potenz der zugehörigen Eigenwerte entwickeln.<sup>51</sup> Dies bedeutet, dass für  $T \rightarrow \infty$  nur noch der zum grössten Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  gehörende Eigenvektor  $\ell_1$  übrigbleibt. Für  $T \rightarrow \infty$  nimmt somit der Einfluss der Eigenvektoren der Dynamik  $P$  auf die resultierende Verteilung umso schneller ab, je kleiner der Betrag des zugehörigen Eigenwerts ist. Dies bedeutet, dass die Konvergenz zur Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  umso schneller abläuft, je kleiner die Beträge der Eigenwerte  $\lambda_2, \dots, \lambda_K$  sind.

Es kann gezeigt werden, dass die *asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit* durch den betragsmässig zweitgrössten Eigenwert  $\lambda_2$  mittels  $-\log |\lambda_2|$  ausgedrückt werden

---

<sup>50</sup> Die Beweise zu diesen Implikationen lassen sich in jedem Standardbuch über Markovketten finden (zum Beispiel Berman und Plemmons 1994; Lancaster und Tismenetsky 1985, Norris 1997; Seneta 1981; Rosenblatt 1974)

<sup>51</sup> In Abschnitt 9.2.4 im Anhang wird die Konvergenz zum Gleichgewichtszustand für primitive Übergangsmatrizen  $P$  demonstriert.

kann.<sup>52</sup> Die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit oder jeder andere auf dem Spektrum der Eigenwerte von  $P$  basierende Mobilitätsindex misst somit auf die eine oder andere Weise die Konvergenz von  $P^T$  gegen  $\Pi$ . Deshalb werden eigenwertbasierte Mobilitätsindices konsequenterweise als *Konvergenzindices* bezeichnet.

Wegen der beiden Mobilitätsaspekte sollte die Mobilität eines stochastischen Prozesses eigentlich durch zwei Indices gemessen werden, je einen Gleichgewichts- und Konvergenzindex. Die Messung der beiden Aspekte durch eine beliebige Kombination der in Tabelle 3-1 aufgelisteten Indices kann jedoch zu unterschiedlichen Aussagen führen und beinhaltet somit einen grossen Anteil an Willkür (vergleiche Tabelle 3-4). Um diese Willkür zu verringern wird ein Ansatz vorgeschlagen, welcher die beiden Masse eng miteinander verbindet. Es wird bewiesen werden, dass die Wahl eines Mobilitätsfunktionalen simultan einen Gleichgewichts- und den zugehörigen Konvergenzindex festlegt. Auf diese Weise lässt sich die Willkür bei der Festlegung eines Indexpaares auf die Wahl eines Mobilitätsfunktionalen reduzieren.

### 3.3.2 Definition der Gleichgewichtsmobilität

Im Gegensatz zu Shorrocks (1978) oder Geweke, Marshall und Zarkin (1986) wird hier der Gleichgewichtsindex nicht direkt auf der Menge der Übergangsmatrizen definiert, das präsentierte Konzept basiert auf einem sogenannten Mobilitätsfunktional. Ein solches Funktional ist eine Art Schema zur Bewertung von Bewegungen zwischen Zuständen, vorliegend in Form einer  $(K \times K)$ -Matrix  $F = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,K}$ . Diese Art des Vorgehens besitzt den beträchtlichen Vorteil, dass die weiter unten vorgeschlagenen Mobilitätsindices leicht auf andere stochastische Prozesse verallgemeinert

---

<sup>52</sup> Berman und Plemmons 1994 (S. 172) definieren die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit als

$$-\log \omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sup_{\mu} \lim_{T \rightarrow \infty} \|\mu' \cdot P^T - \pi'\|^{1/T},$$

wobei das Supremum über alle Anfangsverteilungen  $\mu$  genommen wird. Es kann gezeigt werden, dass die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit im hier vorliegenden Fall durch  $-\log |\lambda_2|$  gegeben ist (Berman und Plemmons 1994, S. 198). Sommers und Conlisk (1979) schlugen  $|\lambda_2|$  als Mass der Immobilität respektive  $1 - |\lambda_2|$  als Mobilitätsmass vor.

werden können. So lässt sich der vorgestellte Ansatz auf ARMA-Prozesse erweitern, womit eine Brücke zur modernen Ökonometrieliteratur über die Modellierung von Einkommensprozessen geschlagen werden kann (vergleiche Alvarez, Browning und Ejrnaes 2001).

DEFINITION 3-1: Ein *Mobilitätsfunktional*  $F = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,K}$  ist eine nichtnegative Funktion auf  $Z \times Z$  so dass

$$f_{ii} = 0 \quad \text{für alle } i \in Z \quad \text{und}$$

$$f_{ij} > 0 \quad \text{für alle } i \text{ und } j \in Z \text{ mit } i \neq j.$$

Das Mobilitätsfunktional ist somit eine Funktion auf  $Z \times Z$ , welche der Bewegung von einem Zustand in einen anderen positive Werte, dem Verharren in einem Zustand hingegen den Wert Null zuordnet. Da Mobilität und Bewegung in diesem Kontext dasselbe sind, ist ein solches Funktional genau das, was benötigt wird, um Einkommensklassenwechsel zu bewerten. Das Mobilitätsfunktional ist eine Art "Distanzmass" zwischen den Zuständen. Da Symmetrie von  $F$  nicht vorausgesetzt wird, braucht das Funktional nicht notwendigerweise eine Metrik zu sein. Dies bedeutet, dass Aufwärtsbewegungen anders als Abwärtsbewegungen bewertet werden könnten. Es ist auch nicht notwendig, dass grössere Bewegungen höher bewertet werden müssen als kleinere.

Der vorgeschlagene Gleichgewichtsindex entspricht dann gerade dem Erwartungswert des gewählten Mobilitätsfunktional hinsichtlich der zweidimensionalen, invarianten (ergodischen oder gleichgewichtigen) Wahrscheinlichkeitsverteilung des zugrundeliegenden Markovprozesses.<sup>53</sup> Er misst die Mobilität wenn sich der Prozess im Gleichgewicht befindet. Bei gegebenem Mobilitätsfunktional wird der Gleichgewichtsindex wie folgt definiert:

DEFINITION 3-2: Für jedes gegebene Mobilitätsfunktional  $F$  auf  $Z \times Z$  ist

$$M_F^e(P) = \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot f_{ij}$$

---

<sup>53</sup> Diese zweidimensionale, gleichgewichtige Dichte ist gegeben durch  $\text{diag}(\pi) \cdot P$ , mit  $\pi$  als gleichgewichtiger Verteilung von  $P$ .



der Gleichgewichts-Mobilitätsindex der primitiven Übergangsmatrix  $P$ . Dabei ist  $\pi$  die eindeutige, invariante Verteilung von  $P$ , auch gleichgewichtige oder ergodische Verteilung genannt. Diese Definition lässt sich in Matrixnotation wie folgt darstellen:

$$M_F^e(P) = \text{Spur}(P' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot F)$$

Die Eigenschaften von  $F$  garantieren, dass  $M_F^e(P) \geq 0$  ist. Der Index ist jedoch in dieser Form nicht normiert, so dass er den Wert 1 auch übertreffen kann. Die Normierung des Index auf das Intervall  $[0,1]$  kann durch Division von  $M_F^e(P)$  durch  $\alpha_{\max}^*$  erreicht werden.<sup>54</sup> Es lässt sich auch zeigen, dass der Index Shorrocks' (1978) Immobilitätsaxiom gemäss  $M_F^e(I_K) = 0$  erfüllt.<sup>55</sup> Da die hier betrachteten Übergangsmatrizen primitiv mit positiver Spur sind, womit die Einheitsmatrix  $I_K$  ausgeschlossen ist, nimmt der Index immer strikt positive Werte an. Auf der Vereinigungsmenge der primitiven Transitionsmatrizen und der Einheitsmatrix erfüllt der Index auch das strenge Immobilitätsaxiom (Shorrocks 1978), das heisst er nimmt nur für die Einheitsmatrix den minimalen Wert Null an. Da der Gleichgewichtsindex die Mobilität in dem Zustand misst, in dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Zeitablauf unverändert gleich  $\pi$  bleibt, misst er was in der soziologischen Literatur Austausch- oder reine Mobilität (exchange oder pure mobility) genannt wird (vergleiche Dardanoni 1993; Maasoumi 1998; Fields und Ok 1999).

In der Literatur existieren zwei bekannte Indices welche Definition 3-2 erfüllen und somit Beispiele für Gleichgewichtsindices darstellen. Es handelt sich hierbei um Bartholomew's Index und um den Index der unbedingten Wahrscheinlichkeit des Verlassens der gegenwärtigen Klasse. Im Fall von Bartholomew's Index ist das Mobi-

---

<sup>54</sup> Dabei ist  $\alpha_{\max}^* \in \mathfrak{R}^+$  eine nur von  $F$  abhängige Zahl, welche die unter diesem Funktional maximal mögliche empirische Mobilität bezeichnet (vergleiche Abschnitt 3.4.2).

<sup>55</sup> Dabei bezeichnet  $I_K$  die  $(K \times K)$ -Einheitsmatrix.

litätsfunktional  $f_{ij} = |i - j|$ :

$$M_B^e(P) = \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot |i - j| .$$

Bartholomew's Index misst somit die Anzahl der Klassen, welche im Gleichgewicht durchschnittlich pro Periode übersprungen werden.

Im Fall der unbedingten Wahrscheinlichkeit des Verlassens der gegenwärtigen Klasse entspricht das Funktional  $f_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ , wobei  $\delta_{ij}$  = Kronecker's Delta.<sup>56</sup>

$$M_U^e(P) = \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot (1 - p_{ii}) = \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot (1 - \delta_{ij}) .$$

So wie der Klassenwechselindex hier dargestellt ist, misst er den Prozentsatz aller Individuen, welche im Gleichgewichtszustand innerhalb einer Periode ihre gegenwärtige Klasse verlassen.

Als weiterer Gleichgewichtsindex wird hier der Index der quadrierten Distanz neu eingeführt. Das Mobilitätsfunktional entspricht hier  $f_{ij} = (i - j)^2$ .

$$M_Q^e(P) = \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot (i - j)^2 .$$

Alle drei Funktionale definieren Metriken auf dem Zustandsraum Z. Alle sind nichtnegativ, sind gleich null dann und nur dann wenn die Argumente übereinstimmen und erfüllen die Dreiecksungleichung. Während das Funktional im Fall von Bartholomew's Index die gewöhnliche euklidische Distanz zwischen den Zuständen i und j ausdrückt, widerspiegelt es beim Index des Verlassens der gegenwärtigen Klasse die sogenannte triviale Metrik. Das Funktional der quadrierten Distanz repräsentiert die quadrierte euklidische Distanz zwischen den Zuständen. Es entspricht somit dem quadrierten Bartholomew-Funktional.

---

<sup>56</sup>  $\delta_{ii} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}$  und  $\delta_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ . In der Literatur wird dieser Index üblicherweise, wie in Tabelle 3-1 dargestellt, mit  $K/(K-1)$  skaliert. Bei den Berechnungen in dieser Arbeit wird diese Skalierung immer weggelassen! Dieses Weglassen führt hier dazu, dass dieser Index auf das Intervall  $[0,1]$  normiert wird.

Bartholomew's Index und der Index der quadrierten Distanz sind Spezialfälle einer Klasse von Gleichgewichtsindices mit dem Mobilitätsfunktional  $f_{ij} = |i - j|^\kappa$ . Diese Indices werden in der Folge auch Potenzindices genannt:

$$M_{P_i}^e(P) = \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot |i - j|^\kappa .$$

Für  $\kappa = 1$  resultiert Bartholomew's Index, für  $\kappa = 2$  resultiert der Index der quadrierten Distanz. Dabei ist letzterer von einem gewissen Interesse, da er speziell geeignet für die Analyse von ARMA-Prozessen ist, womit eine Verbindung zur modernen Ökonometrieliteratur über die Modellierung von Einkommensprozessen hergestellt werden kann.

### 3.3.3 Empirische Mobilität

Die Mittelwertbildung aufeinanderfolgender  $f_{ij}$  entlang eines Einkommenspfades entspricht dem empirischen Analogon zum Gleichgewichtsindex. Deshalb wird diese Mittelung empirische Mobilität genannt. Mittels Substitution der Indices  $i$  respektive  $j$  durch die entsprechenden Realisationen  $X_{t-1}$  respektive  $X_t$  entlang eines Einkommenspfades wird die empirische Mobilität wie folgt definiert:

DEFINITION 3-3: Für jeden auf dem Zustandsraum  $Z$  definierten Markovprozess  $\{X_t\}$  und jedes Mobilitätsfunktional  $F$  auf  $Z \times Z$  wird das zeitliche Mittel  $S_T$  von  $f_{X_{t-1}X_t}$  für  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ ,

$$S_T = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}X_t} ,$$

*empirische Mobilität* bis zur Periode  $T$  genannt.

Es sei hier festgehalten, dass die Annahme der positiven Spur der zugrundeliegenden Übergangsmatrix für alle möglichen Realisierungen von Einkommenspfaden den degenerierten Fall, dass  $S_T$  konstant ist, ausschliesst.

THEOREM 3-1: Die empirische Mobilität konvergiert für jede Anfangsverteilung  $\mu$  und jede primitive Übergangsmatrix  $P$  in Wahrscheinlichkeit gegen den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T f_{x_{t-1}, x_t} = \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot f_{ij} = M_F^e(P) \quad \mathbf{P}_\mu - \text{a.s.}$$

BEWEIS: Dies ist eine Anwendung des ergodischen Theorems (vergleiche Seneta 1981 Kapitel 4; Rosenblatt 1974, Kapitel V,b) auf eine Funktion  $f_{ij}$ , welche auf zwei aufeinanderfolgenden Zuständen  $i$  und  $j$  definiert ist.

Somit konvergiert die empirische Mobilität für  $T \rightarrow \infty$  für alle Einkommenspfade gegen den entsprechenden Gleichgewichtsindex der zugrundeliegenden Übergangsdynamik. In Abschnitt 3.5 wird dann aufgezeigt, wie die Rate, mit welcher diese Konvergenz stattfindet, den durch das Mobilitätsfunktional festgelegten Periodenindex definiert.

Im Falle des Bartholomew-Funktional ist die empirische Mobilität gleichbedeutend mit der Anzahl der Klassen, welche im Durchschnitt pro Periode übersprungen werden. Beim Index des Verlassens der gegenwärtigen Klasse entspricht es der durchschnittlichen Anzahl von Wechslen der jeweils gegenwärtigen Klasse. Das obige Theorem impliziert, dass die Gleichgewichtsmobilität direkt aus beobachteten Einkommenspfaden geschätzt werden kann, ohne in einem vorhergehenden Schritt die Übergangsmatrix schätzen zu müssen, wie dies zum Beispiel bei Shorrocks' Ansatz vonnöten ist (vergleiche hierzu Abschnitt 8.4.2).

### 3.3.4 Verbindungen zu in der Literatur verankerten Konzepten

Um allgemeingültige Aussagen über Gleichgewichtsindices zu machen sowie Querverbindungen zu anderen Zweigen der Mobilitätsliteratur herzustellen, erscheint die Klasse der zulässigen Mobilitätsfunktionale als viel zu allgemein. Deshalb wird in diesem Abschnitt die Klasse der sogenannten *(2)-fallenden Mobilitätsfunktionale* etwas genauer untersucht. Durch Beschränkung auf solche Funktionale lassen sich Zusammenhänge mit in der Literatur etablierten Kriterien, Konzepten und Ordnungsrelationen für die Mobilität von Übergangsmatrizen herstellen.

DEFINITION 3-4: Ein Mobilitätsfunktional  $F$  auf  $Z \times Z$  ist (2)-fallend falls gilt:

$$v_{ij} = f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1} + f_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, K-1\} .$$

Dabei gilt es festzuhalten, dass die Ungleichheit strikt ist falls  $i = j$  gewählt wird. (2)-fallende Funktionale können als das zweidimensionale Analogon zu nicht-wachsenden Funktionen in einer Variablen betrachtet werden.<sup>57</sup> Die obige Definition impliziert direkt, dass  $f_{i+1,j} - f_{ij}$  und  $f_{i,j+1} - f_{ij}$  nicht-wachsende Funktionen in  $j$  respektive  $i$  sind.<sup>58</sup> Für alle  $\kappa \geq 1$  ist das Potenzfunktional  $f_{ij} = |i - j|^\kappa$  (2)-fallend. Dies bedeutet, dass das Bartholomew-Funktional und das Funktional der quadrierten Distanz Definition 3-4 erfüllen. Das Funktional des Verlassens der gegenwärtigen Klasse ist hingegen nicht (2)-fallend.

In der jüngeren Mobilitätsliteratur wurde der Klasse der monotonen Übergangsmatrizen spezielle Aufmerksamkeit zuteil (Conlisk 1990; Dardanoni 1993; Dardanoni 1995; Fields und Ok 1999). Bei monotonen Transitionsmatrizen  $P$  wird die  $i$ 'te Zeile von der  $i+1$ 'ten Zeile stochastisch dominiert:

$$p_{i1} + \dots + p_{ij} \geq p_{i+1,1} + \dots + p_{i+1,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, K-1\} \text{ und } j \in \{1, \dots, K\} .$$

Diese Bedingung kann in Matrixnotation, unter Zuhilfenahme der Summationsmatrix  $T$ , wie folgt dargestellt werden.<sup>59</sup>

$$T^{-1} \cdot P \cdot T \geq 0 .$$

<sup>57</sup> Vergleiche Nelsen (1999, S. 6). Der Wert  $-v_{ij}$  kann als durch  $F$  zugeordnete Fläche des Rechtecks interpretiert werden, dessen Eckpunkte durch  $(i,j)$ ,  $(i+1,j)$ ,  $(i,j+1)$  und  $(i+1,j+1)$  gegeben sind. Die Zahl 2 bei (2)-fallend steht für die Anzahl Argumente. Bei drei Argumenten würde ein solches Funktional als (3)-fallend bezeichnet. Sein Wert entspräche dann einem Volumen.

<sup>58</sup> Für  $f_{i+1,j} - f_{ij}$ , die nicht-steigende Funktion in  $j$ , muss gelten:  $f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} \leq f_{i,j+1} - f_{ij}$ . Dies entspricht Definition 3-4 und ist somit für (2)-fallende Mobilitätsfunktionale erfüllt. Das selbe gilt für  $f_{i,j+1} - f_{ij}$ , die nicht-steigende Funktion in  $i$ .

<sup>59</sup> Die Summationsmatrix  $T$  ist eine obere  $(K \times K)$ -Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf und oberhalb der Hauptdiagonalen und Nullen sonst. Ihre Inverse  $T^{-1}$  hat lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen, minus Einsen auf der ersten oberen Nebendiagonale und Nullen sonst.

In dieser Literatur wird argumentiert, dass monotone Übergangsmatrizen theoretisch plausible Eigenschaften besitzen und dass sie durch die Empirie gestützt werden.

PROPOSITION 3-1: Für alle Übergangsmatrizen P und Q mit derselben invarianten Verteilung  $\pi$  sowie jedes (2)-fallende Mobilitätsfunktional F impliziert

$$(3-1) \quad T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T \leq 0 ,$$

dass sich die Gleichgewichtsindices von P und Q wie folgt verhalten:

$$M_F^e(P) \geq M_F^e(Q) .$$

BEWEIS: Unter der Annahme, dass P und Q dieselbe invariante Verteilung  $\pi$  besitzen sowie dass  $T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T \leq 0$  ist, gilt unter Zuhilfenahme von Definition 3-2:

$$\begin{aligned} M_F^e(P) - M_F^e(Q) &= \text{Spur}(P' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot F) - \text{Spur}(Q' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot F) \\ &= \text{Spur}((P - Q)' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot F) \\ &= \text{Spur}([(P - Q)' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot F]') \\ &= \text{Spur}(F' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q)) \\ &= \text{Spur}(F' \cdot T'^{-1} \cdot T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T \cdot T^{-1}) \\ &= \text{Spur} \left( \underbrace{T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T}_{\text{Matrix 1}} \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot F' \cdot T'^{-1}}_{\text{Matrix 2}} \right) \end{aligned}$$

Die Matrizen 1 und 2 innerhalb der Klammer haben jeweils eine spezielle Struktur. So nimmt Matrix 1, welche der linken Seite von Ungleichung (3-1) entspricht, die folgende Form an:

$$T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T = \begin{bmatrix} M & b \\ b' & 0 \end{bmatrix} .$$

Dabei ist die  $((K-1) \times (K-1))$ -Matrix  $M \leq 0$  gemäss Annahme und der  $((K-1) \times 1)$ -Vektor b besteht aus lauter Nullen. Für Matrix 2 ergibt sich das folgende Bild:

$$T^{-1} \cdot F' \cdot T'^{-1} = \begin{bmatrix} V' & c \\ d' & 0 \end{bmatrix} .$$

Hierbei ist die  $((K-1) \times (K-1))$ -Matrix V nicht-positiv mit den typischen Elementen  $v_{ij} = f_{ij} - f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - f_{i+1j}$ . Da F ein (2)-fallendes Mobilitätsfunktional ist, ist  $V \leq 0$

(vergleiche Definition 3-4). Die  $((K-1) \times 1)$ -Vektoren  $c$  und  $d$  sind beide nicht-negativ. Zusammengefasst folgt damit:

$$\begin{aligned} M_F^e(P) - M_F^e(Q) &= \text{Spur}(P' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot F) - \text{Spur}(Q' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot F) \\ &= \text{Spur}\left(\begin{bmatrix} M & b \\ b' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V' & c \\ d' & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Spur}(M \cdot V') \geq 0 \end{aligned}$$

Die Ungleichheitsrelation folgt, weil das Produkt zweier nicht-positiver Matrizen eine nicht-negative Matrix ergibt, deren Spur wiederum ein nicht-negativer Skalar sein muss.

**q.e.d.**

Die Implikation gilt nur in der in Proposition 3-1 dargestellten Richtung, für die umgekehrte Richtung lassen sich Beispiele finden, bei denen  $M_F^e(P) \geq M_F^e(Q)$  nicht mit  $T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T \leq 0$  einhergeht.<sup>60</sup> Es sei hier ausdrücklich festgehalten, dass Proposition 3-1 für alle Übergangsdynamiken mit identischer Gleichgewichtsverteilung Gültigkeit besitzt, nicht bloss für diejenigen, welche zusätzlich noch monoton sind. Bei Beschränkung auf die Menge  $\mathcal{M}_{P,\pi}$  der monotonen Transitionsmatrizen  $P$  mit identischer Limesverteilung  $\pi$  impliziert Proposition 3-1, dass der durch ein (2)-fallendes Mobilitätsfunktional induzierte Gleichgewichtsindex mit Dardanoni's (1993) partieller Ordnungsrelation kohärent ist. In dieser Klasse von Übergangsdynamiken gilt zudem für (2)-fallende Mobilitätsfunktionale  $F$ , dass die Matrix perfekter Mobilität  $\Pi = \iota \cdot \pi'$  den maximalen Gleichgewichts-Indexwert erreicht ( $M_F^e(\Pi) \geq M_F^e(P) \forall P \in \mathcal{M}_{P,\pi}$ ).<sup>61</sup> Dies deshalb, weil  $T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (\Pi - P) \cdot T \leq 0$  für alle Übergangsmatrizen  $P$  dieser Klasse (Dardanoni 1993, Theorem 2).

<sup>60</sup> In diesen Fällen enthält die  $(K \times K)$ -Matrix  $T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T$  sowohl positive wie auch negative Elemente. Auch bei Beschränkung auf monotone Matrizen mit identischer Limesverteilung lassen sich solche Beispiele konstruieren.

<sup>61</sup> Dabei entspricht  $\iota$  dem  $(K \times 1)$ -Vektor aus lauter Einsen. Die Matrix  $\Pi$  enthält lauter Zeilen die identisch mit der Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  sind. Matrizen mit identischen Zeilen werden in der Literatur oft als perfekt oder maximal mobil bezeichnet.

KOROLLAR 3-1: Sind  $P$  und  $Q$  zwei monotone Übergangsmatrizen mit derselben Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  sowie  $p_{ij} \geq q_{ij}$  für alle  $i \neq j$  und  $p_{ij} > q_{ij}$  für mindestens ein  $i \neq j$ , dann ist  $T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T \leq 0$ . Dies impliziert für (2)-fallende Mobilitätsfunktionale  $F$ , dass  $M_F^e(P) \geq M_F^e(Q)$ .

BEWEIS: Vergleiche Dardanoni (1993, Appendix 2) für den ersten Teil, die Implikation folgt dann aus Proposition 3-1.

KOROLLAR 3-2: Gegeben seien zwei monotone Übergangsmatrizen  $P$  und  $Q$  mit identischer Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  sowie ein (2)-fallendes Mobilitätsfunktional  $F$ . Mit  $\Delta_P$  und  $\Delta_Q$  seien die  $(K-1) \times (K-1)$ -Matrizen in der oberen linken Ecke von  $T^{-1} \cdot P \cdot T$  respektive  $T^{-1} \cdot Q \cdot T$  bezeichnet. Dann folgt implizit aus  $\Delta_Q \geq \Delta_P$ , dass  $T' \cdot \text{diag}(\pi) \cdot (P - Q) \cdot T \leq 0$  ist. Daraus folgt dann, dass  $M_F^e(P) \geq M_F^e(Q)$  gilt.

BEWEIS: Vergleiche Dardanoni (1993, Appendix 2) für den ersten Teil, die Implikation folgt dann aus Proposition 3-1.

Diese Korollare zeigen, dass die Spezifikation des Gleichgewichtsindex mit (2)-fallendem Mobilitätsfunktional im Falle von monotonen Transitionsmatrizen mit identischer Limesverteilung kohärent ist mit Conlisk's (1990) schwachem D-Kriterium wie auch mit Shorrocks' (1978) Monotoniekriterium. Somit erfüllt der Gleichgewichtsindex in diesen Fällen alle Persistenzkriterien (vergleiche Geweke, Marshall und Zarkin (1986)).

### 3.4 GROSSE ABWEICHUNGEN VON MOBILITÄTSFUNKTIONALEN

Um den mit einem Gleichgewichtsindex korrespondierenden Konvergenzindex, den sogenannten Periodenindex, zu definieren, werden in diesem Abschnitt vorerst einige dazu benötigte Konzepte eingeführt. So wird hier gezeigt, dass die empirische Mobilität mit einer exponentiellen Rate gegen den korrespondierenden Gleichgewichtsindex strebt. Die Herleitung dieses Resultats sowie der Ausdruck der Konvergenzrate werden als Hauptwerkzeuge bei der Analyse der Periodenmobilität dienen.



Um dabei den Fokus nicht zu verlieren und aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die noch einzuführenden Konzepte sowie entsprechende kurze Erläuterungen an dieser Stelle in Tabelle 3-2 vorweggenommen.

Konzept	Symbol	Erläuterung
Maximal mögliche empirische Mobilität	$\alpha_{\max}(P)$	Unter der Dynamik $P$ und dem gewählten Mobilitätsfunktional $F$ existiert eine positive Wahrscheinlichkeit dafür, dass die empirische Mobilität entlang eines Einkommenspfads über dem Gleichgewichtsindex $M_F^e(P)$ liegt. Mit zunehmender Pfadlänge konvergiert diese Wahrscheinlichkeit gegen 0. Die unter $P$ maximal mögliche empirische Mobilität wird mit $\alpha_{\max}(P)$ bezeichnet.
Schwellenwert grosser Abweichungen	$\alpha$	Betrachtet werden Einkommenspfade mit einer empirischen Mobilität oberhalb des vorgegebenen Schwellenwerts $\alpha$ , welcher zwischen der Gleichgewichts- und der maximalen empirischen Mobilität gewählt wird. Es ist dann von grossen Abweichungen oberhalb des Schwellenwerts $\alpha$ die Rede. Von Interesse ist die Konvergenzrate, mit welcher die Realisationswahrscheinlichkeit solcher Pfade bei zunehmender Pfadlänge gegen 0 strebt. Diese Konvergenzrate wird dann benötigt, um den mit dem entsprechenden Gleichgewichtsindex über das gewählte Mobilitätsfunktional verbundenen Periodenindex zu definieren.
Perron-Frobenius Transformierte	$P_{\beta(\alpha)}$	Die Perron-Frobenius Transformierte von $P$ ist unter allen Übergangsdynamiken, deren Gleichgewichtsindex dem vorgegebenen Schwellenwert $\alpha$ entspricht, diejenige, welche die Realisationswahrscheinlichkeit von Einkommenspfaden mit einer empirischen Mobilität grösser oder gleich dem Schwellenwert $\alpha$ maximiert. Um die Realisationswahrscheinlichkeit grosser Abweichungen nicht zu unterschätzen ist es notwendig, diese maximale Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Die relative Entropie von $P_{\beta(\alpha)}$ hinsichtlich $P$ liefert dann die gesuchte Konvergenzrate und führt so zur Definition der Periodenmobilität von $P$ .

**Tabelle 3-2:** Übersicht über Konzepte zur Untersuchung der Asymptotik der empirischen Mobilität

### 3.4.1 Die Perron-Frobenius Transformation

DEFINITION 3-5: Es seien  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  zwei reguläre Markovketten mit korrespondierenden primitiven Übergangsmatrizen  $P$  und  $Q$  sowie Gleichgewichtsverteilungen  $\pi_P$  und  $\pi_Q$ . Wenn  $\mathbf{Q}$  absolut stetig hinsichtlich  $\mathbf{P}$  ist,<sup>62</sup> dann ist die relative Entropie  $H_T(\mathbf{Q} | \mathbf{P})$  von  $\mathbf{Q}$  hinsichtlich  $\mathbf{P}$  bis zur Periode  $T$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\Sigma_T = \sigma(X_t, 0 \leq t \leq T)$  definiert durch

$$H_T(\mathbf{Q} | \mathbf{P}) = \int \log \left. \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right|_{\Sigma_T} d\mathbf{Q} .$$

Die Radon-Nikodym Ableitung von  $\mathbf{Q}$  hinsichtlich  $\mathbf{P}$  auf  $\Sigma_T$  ist wie folgt definiert:

$$\left. \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right|_{\Sigma_T} = \frac{\pi_{Q,X_0} \cdot q_{X_0 X_1} \cdot \dots \cdot q_{X_{T-1} X_T}}{\pi_{P,X_0} \cdot p_{X_0 X_1} \cdot \dots \cdot p_{X_{T-1} X_T}} \quad \mathbf{Q} \Big|_{\Sigma_T} \text{ - a.s.}$$

Die relative Entropie von  $\mathbf{Q}$  hinsichtlich  $\mathbf{P}$  bis zur Periode  $T$  entspricht somit dem Erwartungswert hinsichtlich  $\mathbf{Q}$  der logarithmierten Radon-Nikodym Ableitung von  $\mathbf{Q}$  hinsichtlich  $\mathbf{P}$ .

Zudem ist die *spezifische relative Entropie pro Periode*  $h(\mathbf{Q} | \mathbf{P})$  der Übergangsmatrix  $Q$  hinsichtlich  $P$  definiert gemäss (Rosenblatt 1974, Kapitel V,d)

$$h(\mathbf{Q} | \mathbf{P}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot H_T(\mathbf{Q} | \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \sum_{j=1}^K q_{ij} \cdot \log \frac{q_{ij}}{p_{ij}} . \quad ^{63}$$

DEFINITION 3-6: Für ein gegebenes Mobilitätsfunktional  $F$  und jedes  $\beta \in \mathfrak{R}$  ist die *Perron-Frobenius-Transformierte*  $P_\beta = (p_{\beta,ij})_{i,j=1,\dots,K}$  einer irreduziblen Übergangsmatrix  $P$  durch die folgende Matrix definiert:

$$p_{\beta,ij} = \frac{a_{\beta,ij} \cdot r_{\beta,j}}{\lambda_\beta \cdot r_{\beta,i}}, \quad \text{mit } a_{\beta,ij} = p_{ij} \cdot e^{\beta \cdot f_{ij}} .$$

<sup>62</sup> In der Sprache der Übergangsmatrizen bedeutet dies:  $p_{ij} = 0$  impliziert  $q_{ij} = 0$ .

<sup>63</sup> Die spezifische relative Entropie  $h(\mathbf{Q} | \mathbf{P})$  besitzt dieselben Eigenschaften, wie sie in Kapitel 2 auf Seite 25 für die relative Entropie zwischen zwei zweidimensionalen Dichtematrizen beschrieben wurden. Insbesondere ist  $h(\mathbf{Q} | \mathbf{P})$  eine nichtnegative Funktion von  $Q$  die dann und nur dann den minimalen Wert 0 annimmt, wenn  $Q = P$  ist.

Dabei ist  $r_\beta \gg 0$  ein rechter Eigenvektor der zu  $\lambda_\beta$  gehört, dem grössten positiven Eigenwert der Matrix  $A_\beta = (a_{\beta,ij})_{i,j=1,\dots,K}$ . Die Menge der Matrizen  $\{P_\beta\} = \{P_\beta \mid \beta \in \mathfrak{R}\}$  wird *exponentielle Perron-Frobenius-Familie* von  $P$  genannt.

Die Perron-Frobenius-Transformierte ist auch unter der Bezeichnung "twisted transition matrix" bekannt. Die Matrix  $A_\beta$  wird, für  $\beta > 0$ , durch exponentielles Aufblähen der positiven Nichtdiagonalelemente von  $P$  generiert. Wegen  $f_{ii} = 0$  entsprechen die Diagonalelemente von  $A_\beta$  denjenigen von  $P$ . Je höher ein zu einem Element  $p_{ij}$  gehörender Funktionalwert  $f_{ij}$  ist, desto stärker wird ersterer aufgebläht. Da die durch diesen Prozess produzierte Matrix  $A_\beta$  keine Übergangsmatrix mehr ist, wird sie renormiert um die Transitionsmatrix  $P_\beta$  zu erhalten. Je grösser  $\beta$  gewählt wird, desto stärker ist in jeder Zeile von  $P$  die Verlagerung der Gewichte hin zu jenen positiven Elementen  $p_{ij}$ , welche die grössten korrespondierenden Funktionalwerte  $f_{ij}$  besitzen. Da sich das Gewicht somit von Hauptdiagonal- zu Nichtdiagonalelementen verschiebt, wird intuitiv klar, dass die so konstruierte Perron-Frobenius Matrix  $P_\beta$  mobiler als die zugrundeliegende Transitionsmatrix  $P$  sein muss, solange  $\beta > 0$  ist. Zudem muss mit steigendem  $\beta$  der Gleichgewichtsindex von  $P_\beta$  zunehmen. Bevor diese intuitiven Einsichten bewiesen werden, wird aufgezeigt, dass  $P_\beta$  für jede irreduzible Übergangsmatrix  $P$  wohl definiert ist.

PROPOSITION 3-2: Für jede irreduzible Übergangsmatrix  $P$  haben  $A_\beta$  und die Perron-Frobenius-Transformierte  $P_\beta$  von  $P$ , welche beide in Definition 3-6 eingeführt wurden, die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $A_\beta$  ist irreduzibel. Somit ist  $\lambda_\beta$  ein einfacher Eigenwert, welcher gerade dem Spektralradius von  $A_\beta$  entspricht.<sup>64</sup> Zu diesem Eigenwert korrespondieren

---

<sup>64</sup>  $\lambda_\beta$  ist dann ein einfacher Eigenwert, wenn  $\lambda_\beta$  bei der Lösung des Eigenwertproblems nur einmal und nicht mehrfach vorkommt. Zu  $\lambda_\beta$  existieren dann je ein linear unabhängiger linker respektive rechter Eigenvektor. Da  $\lambda_\beta$  dem Spektralradius von  $A_\beta$  entspricht, ist  $\lambda_\beta$  reellwertig positiv. Alle anderen Eigenwerte der irreduziblen Matrix  $A_\beta$  sind betragsmässig kleiner oder gleich  $\lambda_\beta$ . Ist  $A_\beta$  gar primitiv, dann sind die restlichen Eigenwerte in ihrem Betrag sogar strikt kleiner als  $\lambda_\beta$ .

ein linker und ein rechter Eigenvektor mit  $\ell_\beta \gg 0$ ,  $r_\beta \gg 0$  und  $\ell_\beta \cdot r_\beta = 1$ .  
Wenn  $P$  eine primitive Matrix ist, so ist auch  $A_\beta$  primitiv.

- (ii)  $P_\beta = R_\beta^{-1} \cdot \frac{A_\beta}{\lambda_\beta} \cdot R_\beta > 0$  mit  $R_\beta = \text{diag}(r_\beta)$  ist eine irreduzible stochastische Matrix mit eindeutiger, invarianter Verteilung  $\pi_\beta = R_\beta \cdot \ell_\beta$ . Falls  $P$  primitiv ist, trifft dies auch für  $P_\beta$  zu.

- (iii) Falls  $P$  primitiv ist, dann ist  $\lim_{T \rightarrow \infty} P_\beta^T = \lim_{T \rightarrow \infty} R_\beta^{-1} \cdot \left( \frac{A_\beta}{\lambda_\beta} \right)^T \cdot R_\beta = \mathbf{1} \cdot \pi_\beta'$  mit  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$ . Die Auflösung dieses Grenzwerts nach  $A_\beta^T$  ergibt elementweise betrachtet  $a_{\beta,ij}^{(T)} = \lambda_\beta^T \cdot r_{\beta,i} \cdot \ell_{\beta,j} \cdot [1 + O(\varepsilon_\beta^T)]$  mit  $0 < \varepsilon_\beta < 1$ .<sup>65</sup>

BEWEIS: Es handelt sich hierbei um Standardresultate basierend auf dem Perron-Frobenius-Theorem wie sie zum Beispiel in Seneta (1981) oder Berman und Plemmons (1994) gefunden werden können.

Aus (i) wird ersichtlich, dass  $r_\beta$  keine Nullkoordinate haben kann. Folglich ist eine Division durch null in der Definition von  $P_\beta$  unmöglich. Aus (ii) geht hervor dass die Perron-Frobenius-Transformation einen Operator auf der Menge der irreduziblen respektive der primitiven Übergangsmatrizen definiert.

---

<sup>65</sup> Mit  $x_{ij}^{(n)}$  ist das Element  $(i,j)$  der  $n$ -ten Potenz der Matrix  $X$  gemeint und nicht die  $n$ -te Potenz des Elements  $(i,j)$  der Matrix  $X$ , welches mit  $x_{ij}^n$  bezeichnet würde.

Das Landau-Symbol  $O(\cdot)$  hat die folgende Bedeutung: Beim elementweisen Auflösen des Grenzwertes aus Proposition 3-2 (iii) nach  $A_\beta^T$  resultiert die Gleichung  $a_{\beta,ij}^{(T)} = \lambda_\beta^T \cdot r_{\beta,i} \cdot \ell_{\beta,j} \cdot [1 + g(T)]$ . Die komplizierte Funktion  $g(T)$  kann durch die einfache Funktion  $\varepsilon_\beta^T$  (mit  $0 < \varepsilon_\beta < 1$ ) angenähert werden. Dabei gilt der Zusammenhang  $g(T) = O(\varepsilon_\beta^T)$ , mit der Bedeutung:

$$\exists c > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0 : g(T) \leq c \cdot \varepsilon_\beta^T .$$

Dabei ist  $c$  konstant. In Worten ausgedrückt bedeutet dies, dass die Funktion  $g(T)$  nicht schneller mit  $T$  wächst als  $\varepsilon_\beta^T$  (vergleiche z.B. [http://www.wikipedia.org/wiki/Big\\_O\\_notation](http://www.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation)).

In Proposition 3-3 sind die Eigenschaften von  $\lambda_\beta$ , dem reellen und betragsmässig grössten Eigenwert der Matrix  $A_\beta$ , zusammengefasst.

PROPOSITION 3-3: Für jede irreduzible Übergangsmatrix  $P$  mit positiver Spur besitzt der in Definition 3-6 definierte Eigenwert  $\lambda_\beta$  die folgenden Eigenschaften:

- (i) Der Definitionsbereich von  $\lambda_\beta$  (als Funktion von  $\beta$ ) ist  $\mathfrak{R}^+$ .
- (ii)  $\lambda_0 = \lambda_{\beta=0} = 1$ .
- (iii)  $\lambda_\beta$  ist streng monoton wachsend in  $\beta$ .
- (iv)  $\lambda_\beta$  ist unendlich oft differenzierbar ( $\equiv$  analytisch).
- (v)  $\lambda_\beta$  sowie  $\log \lambda_\beta$  sind strikt konvexe Funktionen von  $\beta$ .
- (vi)  $\frac{\lambda'_\beta}{\lambda_\beta} = \sum_{i=1}^K \pi_{P_\beta, i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\beta, ij} \cdot f_{ij} = M_F^e(P_\beta)$  und  $\frac{\lambda'_0}{\lambda_0} = \lambda'_0 = \sum_{i=1}^K \pi_{P, i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{ij} \cdot f_{ij} = M_F^e(P)$  wobei  $\pi_{P_\beta}$  die invariante Verteilung von  $P_\beta$  ist.

BEWEISE: Vergleiche Appendix, Abschnitt 9.2.2.

Es gilt hier festzuhalten, dass die Annahme  $\text{Spur}(P) > 0$  sicherstellt, dass  $\log \lambda_\beta$  nicht linear in  $\beta$  sein kann und somit strikt konvex und nicht bloss konvex sein muss. Wie durch Gegenbeispiele gezeigt werden kann, würde die Annahme der Primitivität von  $P$  alleine nicht genügen, um dies sicherzustellen. Aus (v) und (vi) lässt sich erkennen, dass  $M_F^e(P_\beta)$  wachsend in  $\beta$  ist, weil  $\lambda'_\beta / \lambda_\beta$ , die Ableitung der strikt konvexen Funktion  $\log \lambda_\beta$ , eine wachsende Funktion von  $\beta$  ist.

### 3.4.2 Maximal erreichbare empirische Mobilität

Es soll nun die maximale empirische Mobilität  $\alpha_{\max}(P)$  betrachtet werden, welche mit positiver Wahrscheinlichkeit unter einer Dynamik  $P$  und einem Mobilitätsfunktional  $F$  realisierbar ist. Um diese herzuleiten sollen hier einige Grundlagen nochmals kurz dargestellt werden. Individuen können zwischen  $K$  Zuständen wechseln. Das Mobilitätsfunktional  $F$  bewertet Zustandswechsel positiv, das Verharren in einem Zustand erhält das Gewicht Null. Damit die empirische Mobilität ihr Maximum  $\alpha_{\max}(P)$  erreicht,

muss sich ein Individuum immer so zwischen den Zuständen bewegen, dass die Bewegungen durch das Funktional jeweils mit möglichst hohen Werten bewertet werden. Zudem bedeutet die Tatsache der endlichen Dimension  $K$ , dass das Individuum nach einer gewissen Anzahl von  $N \leq K$  Bewegungen wieder seinen Ausgangszustand erreicht. Dies bedeutet, dass  $\alpha_{\max}(P)$  durch einen Kreispfad der Länge  $N$  charakterisiert werden kann. Um  $\alpha_{\max}(P)$  formal auszudrücken wird hier, analog zum stochastischen Prozess  $\{X_i\}$ , die Variablenfolge  $\{I_n\}$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  eingeführt. Dabei kann die Variable  $I_n$  Werte innerhalb des endlichen Zustandsraums  $Z = \{1, 2, \dots, K\}$  annehmen. Die gesuchte maximale Mobilität  $\alpha_{\max}(P)$  ist nun bestimmt durch denjenigen Pfad aus der Menge aller möglichen Kreispfade  $\{I_0, I_1, \dots, I_N\}$ , welcher die zugehörige empirische Mobilität maximiert (es ist durchaus möglich, dass mehrere unterschiedliche Kreispfade die empirische Mobilität maximieren). Mit den getroffenen Konventionen lässt sich  $\alpha_{\max}(P)$  folgendermassen ausdrücken:

$$(3-2) \quad \alpha_{\max}(P) = \max_{\text{alle Kreispfade}} \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N f_{I_{n-1}I_n} < \infty .$$

Bei einem Kreispfad  $\{I_0, I_1, \dots, I_N\}$  sind die  $I_1, \dots, I_N$  alle unterschiedlich,  $I_0$  entspricht jedoch  $I_N$ . Da das Mobilitätsfunktional so definiert wurde, dass  $f_{ij} = 0$  für alle  $i$ , wird das Maximum durch einen Kreispfad der Länge  $N$  mit  $2 \leq N \leq K$  erreicht. Typischerweise hängt der Wert von  $\alpha_{\max}(P)$  nicht von den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten in  $P$  ab, er wird nur durch die Positionen von eventuellen Nullelementen in der Matrix  $P$  mitbestimmt. Somit müssen äquivalente Übergangsmatrizen denselben Wert für  $\alpha_{\max}(P)$  aufweisen.<sup>66</sup> Im speziellen haben alle positiven Matrizen derselben Dimension dasselbe  $\alpha_{\max}(P)$ .<sup>67</sup> Zudem gilt für alle positiven  $(K \times K)$ -Übergangsmatrizen  $P$  sowie alle Mobilitätsfunktionale  $F$ , dass  $\alpha_{\max}(P)$  nur noch vom gewählten Funktional  $F$  abhängig

---

<sup>66</sup> Zwei Übergangsmatrizen  $P$  und  $Q$  sind äquivalent dann und nur dann, wenn  $p_{ij} = 0$  impliziert, dass  $q_{ij} = 0$  und  $q_{ij} = 0$  impliziert, dass  $p_{ij} = 0$ .

<sup>67</sup> Im Anhang in Abschnitt 9.2.5 wird  $\alpha_{\max}$  für zwei Matrizen hergeleitet. Für ein intuitiveres Verständnis der maximal möglichen empirischen Mobilität sei hier auf diese beiden Beispiele verwiesen.

ist und deshalb mit  $\alpha_{\max}^*$  bezeichnet wird. Für die Menge aller  $(K \times K)$ -Übergangsmatrizen  $Q$  gilt dann, dass

$$\alpha_{\max}^* \geq \alpha_{\max}(Q) ,$$

wobei Gleichheit sicher dann erreicht wird, wenn  $Q$  positiv ist. Die Positivität von  $Q$  ist jedoch nicht zwingend notwendig damit Gleichheit erreicht werden kann.

### 3.4.3 Das Prinzip der grossen Abweichungen

Die Grundlagen zur Formulierung des Haupttheorems sind nun vorhanden. Es soll hier nochmals festgehalten werden, dass dieses Theorem nicht neu ist. Es lässt sich als Spezialfall einer allgemeinen Theorie interpretieren (Iscoe, Ney, und Nummelin 1985; Ney und Nummelin 1987a, 1987b; Deuschel und Stroock 1989; Dembo und Zeitouni 1998). Da die Anwendung und Berechnung in den Vordergrund gestellt werden soll, wird hier trotzdem eine in sich geschlossene und vollkommen auf die präsentierte Anwendung angepasste Version des Theorems grosser Abweichungen formuliert und bewiesen.

PROPOSITION 3-4: Für jede irreduzible Übergangsmatrix  $P$  mit strikt positiver Spur ist die Legendre-Fenchel-Transformierte  $I(\alpha)$  von  $\log \lambda_\beta$  für alle möglichen Schwellenwerte  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  gegeben durch

$$I(\alpha) = -\inf_{\beta \in \mathfrak{R}} (\log \lambda_\beta - \alpha \cdot \beta) = \sup_{\beta \in \mathfrak{R}} (\alpha \cdot \beta - \log \lambda_\beta) = \alpha \cdot \beta(\alpha) - \log \lambda_{\beta(\alpha)} ,$$

wobei  $\beta(\alpha)$  positiv, endlich und eindeutig ist.

BEWEIS: Vergleiche Abschnitt 9.2.2 im Anhang.

Die Annahme der positiven Spur der Übergangsmatrix  $P$  hat zur Folge, dass  $\alpha_{\max}(P) > M_F^e(P)$  ist. Somit existiert immer ein nicht-trivialer Schwellenwert  $\alpha > M_F^e(P)$ .<sup>68</sup>

---

<sup>68</sup> Damit ist der triviale Fall der Gleichheit von  $\alpha_{\max}(P)$  und  $M_F^e(P)$  ausgeschlossen. Bei Gleichheit von  $\alpha_{\max}(P)$  und  $M_F^e(P)$  wären Abweichungen oberhalb des Gleichgewichts unmöglich. In diesem Fall

THEOREM 3-2:<sup>69</sup> Zu jedem Schwellenwert  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  existieren ein eindeutiges  $\beta(\alpha) \in \mathfrak{R}$  sowie eine Perron-Frobenius-Transformierte  $P_{\beta(\alpha)}$  von  $P$  so, dass

$$(i) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \log \Pr \left\{ S_T = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}X_t} \geq \alpha \right\} = -I(\alpha) = -\sup_{\beta \in \mathfrak{R}} (\alpha \cdot \beta - \log \lambda_{\beta})$$

$$= -\alpha \cdot \beta(\alpha) + \log \lambda_{\beta(\alpha)} = -h(P_{\beta(\alpha)} | P) .$$

$$(ii) \quad M_F^e(P_{\beta(\alpha)}) = \sum_{i=1}^K \pi_{P_{\beta(\alpha)}, i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\beta(\alpha), ij} \cdot f_{ij} = \alpha .$$

BEWEIS: Vergleiche Abschnitt 9.2.2 im Appendix.

Dies bedeutet für die Realisationswahrscheinlichkeit grosser Abweichungen der empirischen Mobilität oberhalb eines Schwellenwerts  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$ :<sup>70</sup>

wäre es somit sinnlos, Konvergenz hin zum Gleichgewicht zu untersuchen. Solch ein Fall könnte zum Beispiel für  $f_{ij} = 1 - \delta_{ij}$  dann auftreten, wenn  $P$  eine Matrix mit Nullen auf der Hauptdiagonalen und strikt positiven Nichtdiagonalelementen wäre. Dieser Fall ist jedoch bei strikt positiver Spur von  $P$  unmöglich.

<sup>69</sup> Hier wird das Theorem in seiner spezifischen Form für Abweichungen der empirischen Mobilität oberhalb des Niveaus der Gleichgewichtsmobilität gezeigt. Da auch Abweichungen der empirischen Mobilität unterhalb  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  und somit unterhalb des Gleichgewichtsindex möglich sind, wird in Abschnitt 9.2.2.1 das Theorem noch in allgemeiner Form dargestellt.

<sup>70</sup> Es hat sich gezeigt, dass der Terminus "grosse Abweichung" im in Kapitel 3 verwendeten Kontext immer wieder zu Missverständnissen führt. In diesem Kapitel wird unter anderem untersucht, wie gross die Wahrscheinlichkeit von Abweichungen der empirischen Mobilität von der Gleichgewichtsmobilität ist. Abweichungen der empirischen Mobilität vom entsprechenden Gleichgewichtsindex werden nicht deshalb als grosse Abweichungen bezeichnet, weil die Differenz zwischen empirischer Mobilität (respektive dem Schwellenwert  $\alpha$  zur Berechnung von  $\Pr\{S_T \geq \alpha\}$ ) und zugehörigem Gleichgewichtsindex gross ist. Diese Differenz kann durchaus auch minimal ausfallen (vergleiche Abschnitt 8.4.3.1). Unabhängig vom Ausmass dieser Differenz strebt die Wahrscheinlichkeit, dass die empirische Mobilität im Zeitablauf weiterhin entsprechend von der Gleichgewichtsmobilität abweicht, mit zunehmender Zeit exponentiell, das heisst sehr schnell gegen 0. Ereignisse, deren Realisierungswahrscheinlichkeit im Zeitablauf mit exponentieller Rate verschwindet, sind seltene Ereignisse. Seltene Ereignisse sind jedoch das Anwendungsgebiet der Theorie grosser Ab-



$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Pr\{S_T \geq \alpha\} = e^{-T \cdot h(P_{\beta(\alpha)}|P)} .$$

Folglich zeigt die empirische Mobilität  $S_T$  eine exponentielle Konvergenzrate, welche durch die relative Entropie derjenigen Perron-Frobenius-Transformierten  $P_{\beta(\alpha)}$  von  $P$  hinsichtlich  $P$  gegeben ist, deren Gleichgewichtsindex gerade dem gewählten Schwellenwert  $\alpha$  entspricht. Je grösser die Konvergenzrate  $h(P_{\beta(\alpha)}|P)$ , desto schneller konvergiert die empirische Mobilität gegen den zugehörigen Gleichgewichtsindex. Wenn die empirische Mobilität auf einem Pfad grosser Abweichungen oberhalb des Schwellenwerts  $\alpha$  ist, was gleichbedeutend mit überdurchschnittlich häufigen Klassenwechseln dieses Individuums in der Vergangenheit ist, bedeutet Konvergenz gegen den Gleichgewichtsindex, dass das Individuum zukünftig weniger oft zwischen den Klassen wechselt. Im Gegensatz zum Fall konventioneller Konvergenzindices geht schnelle Konvergenz somit im hier vorgestellten Kontext nicht mit hoher, sondern mit geringer Mobilität einher.

Der zweite Teil des Theorems zeigt, dass die ursprüngliche Übergangsmatrix  $P$  durch die Perron-Frobenius-Transformation gerade so "verdreht" wird, dass der zugehörige Gleichgewichtsmobilitätsindex genau dem gewählten Schwellenwert  $\alpha$  entspricht. Da die relative Entropie als "gerichtete" Distanz interpretiert werden kann, ist die durch diese Transformation erzielte Grössenordnung der "Verdrehung" von  $P$  durch  $h(P_{\beta(\alpha)}|P)$  gegeben.

Obschon die vorgestellte Theorie im Kontext von Markovprozessen in endlichen Zustandsräumen erarbeitet wurde, lassen sich die präsentierten Konzepte direkt auf allgemeine Zustandsräume und generellere Markovprozesse anwenden. Solche Erweiterungen erfordern jedoch eine hoch technische und analytische Maschinerie um auch nur die grundlegendsten Theoreme zu etablieren. Zudem muss der Markovprozess einigen Restriktionen unterworfen werden, um sicherzustellen, dass die Legendre-Fenchel-Transformierte respektive die konvex Konjugierte von  $\log \lambda_\beta$  endlich auf einem bestimmten Intervall sind. Diese Restriktionen nehmen typischerweise

---

weichungen (vergleiche Fussnote 21, S.21). Deshalb ist in diesem Kapitel von grossen Abweichungen der empirischen Mobilität vom Gleichgewichtsindex die Rede.

die Form einer "uniform recurrence" Bedingung an (Kim und David 1979, Annahme A4; Iscoe, Ney und Nummelin 1985, 377). Lemma 9-1 im Appendix (Abschnitt 9.2.2) zeigt auf, dass eine solche Bedingung im Kontext endlicher Zustandsräume automatisch erfüllt wird.

### 3.5 PERIODENMOBILITÄT UND BEISPIELE

#### 3.5.1 Periodenmobilitätsindex

Theorem 3-2 impliziert, dass sich die Wahrscheinlichkeit  $\Pr\{S_T \geq \alpha\}$  von grossen Abweichungen der empirischen Mobilität  $S_T$  oberhalb eines Schwellenwerts  $\alpha$  für grosse  $T$  approximativ mit  $\exp\{-T \cdot h(P_{\beta(\alpha)}|P)\}$  entwickelt. Die exponentielle Rate  $h(P_{\beta(\alpha)}|P)$  misst deshalb die Geschwindigkeit mit der  $S_T$  gegen  $M_F^e(P)$  konvergiert. Diese Gegebenheiten führen zur folgenden Definition des Periodenmobilitätsindex:

DEFINITION 3-7: Ausgehend von einer grossen Abweichung oberhalb eines Schwellenwerts  $\alpha$ ,  $M_F^e(P) < \alpha < \alpha_{\max}(P)$ , wird der *Periodenmobilitätsindex*  $M_F^p(P | \alpha)$  wie folgt definiert:

$$M_F^p(P | \alpha) = e^{-h(P_{\beta(\alpha)}|P)} .$$

Dabei ist  $P_{\beta(\alpha)}$  die Perron-Frobenius-Transformierte von  $P$  mit der Eigenschaft  $M_F^e(P_{\beta(\alpha)}) = \alpha$  (vergleiche Theorem 3-2). Der Periodenmobilitätsindex wird gleich 1 gesetzt wenn  $M_F^e(P) = \alpha_{\max}(P)$ . Durch die getroffene Annahme  $\text{Spur}(P) > 0$  ist dieser Fall jedoch ausgeschlossen.

Es kann aufgezeigt werden, dass sich für den Periodenindex die folgende einfache Interpretation ergibt: Asymptotisch für  $T \rightarrow \infty$  entspricht der Periodenmobilitätsindex der Wahrscheinlichkeit, dass die empirische Mobilität im Zeitpunkt  $T + 1$  den Schwellenwert  $\alpha$  immer noch übertrifft, gegeben dass  $\alpha$  schon zum Zeitpunkt  $T$  übertroffen wurde:

$$(3-3) \quad M_F^p(P | \alpha) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Pr\{S_{T+1} \geq \alpha | S_T \geq \alpha\} .$$

Der Name Periodenmobilität stammt aus dieser Interpretation des Periodenindex als bedingte Wahrscheinlichkeit für fortgesetzte grosse Abweichungen der empirischen Mobilität oberhalb des Schwellenwerts  $\alpha$  in der nächsten Periode.<sup>71</sup> Die Darstellung des Periodenindex als Wahrscheinlichkeit garantiert, dass er zwischen 0 und 1 liegen muss. Ein Indexwert nahe bei 0 bedeutet geringe, ein Wert nahe bei 1 steht für grosse Periodenmobilität. Im hier diskutierten Kontext bedeutet eine hohe Periodenmobilität, dass die untersuchte Dynamik ein grosses Potential für Bewegungen zwischen den Klassen aufweisen muss. Dabei gilt es zu beachten, dass Dynamiken mit geringerem Bewegungspotential schneller gegen ihren Gleichgewichtsindex konvergieren, falls sich die empirische Mobilität gegenwärtig oberhalb des Schwellenwerts  $\alpha$  befinden sollte. Schnelle Konvergenz zum Gleichgewichtsindex hat somit einen niedrigen, langsame Konvergenz einen hohen Periodenmobilitätsindex zur Folge.

Bei der Bestimmung der Periodenmobilität stellt sich die Frage, bei welchem Schwellenwert  $\alpha$  oberhalb der Gleichgewichtsmobilität diese berechnet werden soll. Dabei gilt es, gewisse Zusammenhänge zu vergegenwärtigen. Für jede Übergangsmatrix  $P$  kann der Schwellenwert  $\alpha$  für grosse Abweichungen oberhalb des Gleichgewichtsindex aus dem für diese Dynamik spezifischen Intervall  $(M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  gewählt werden. Im folgenden seien die zwei unterschiedlichen Übergangsmatrizen  $P$  und  $Q$  gegeben, welche hinsichtlich ihrer Periodenmobilität verglichen werden sollen. Dabei lassen sich die folgenden vier Fälle unterscheiden:

1.  $P$  und  $Q$  weisen identische Gleichgewichtsmobilitäten sowie maximal mögliche empirische Mobilitäten auf:  $\Rightarrow M_F^e(P) = M_F^e(Q), \alpha_{\max}(P) = \alpha_{\max}(Q)$ .

Die beiden Übergangsdynamiken besitzen identische Bereiche  $\{(M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  respektive  $(M_F^e(Q), \alpha_{\max}(Q))\}$  für die Wahl des Schwellenwerts, bei dem die Periodenmobilität bestimmt werden soll. Sie können ohne weiteres bei jedem Wert  $\alpha$  aus diesem Bereich verglichen werden. Ein Vergleich bei einem Schwellenwert  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  bedeutet hier, dass die beiden Dynamiken bei identischen

---

<sup>71</sup> Die Herleitung dieser Interpretation findet sich in Abschnitt 9.2.2 im Appendix.

absoluten Abständen von ihren Gleichgewichtsindices ( $\alpha - M_F^e(P) = \alpha - M_F^e(Q)$ ) verglichen werden.

2. P und Q haben denselben Gleichgewichtsindex, jedoch unterschiedliche maximal mögliche Mobilitäten:  $\Rightarrow$  z.B.  $M_F^e(P) = M_F^e(Q)$ ,  $\alpha_{\max}(P) < \alpha_{\max}(Q)$ .

Hier ist der Bereich für die Wahl von  $\alpha$  für die Dynamik P kleiner als für Q. Die beiden Dynamiken lassen sich bei allen Werten von  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  vergleichen. Wie in Fall 1 bedeutet ein Vergleich bei einem Wert  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$ , dass die beiden Dynamiken bei identischen absoluten Abständen von ihren Gleichgewichtsindices verglichen werden ( $\alpha - M_F^e(P) = \alpha - M_F^e(Q)$ ).

Für  $\alpha \in (\alpha_{\max}(P), \alpha_{\max}(Q))$  kann nur noch die Periodenmobilität der Dynamik Q bestimmt werden.

3. P und Q haben verschiedene Gleichgewichtsindices, jedoch identische maximal mögliche Mobilitäten:  $\Rightarrow$  z.B.  $M_F^e(P) < M_F^e(Q)$ ,  $\alpha_{\max}(P) = \alpha_{\max}(Q)$ .

Diese Dynamiken liessen sich bei allen Schwellenwerten  $\alpha \in (M_F^e(Q), \alpha_{\max}(Q))$  vergleichen. Ein solcher Vergleich ist aber wenig sinnvoll. Während in den Fällen 1 und 2 ein Vergleich bei identischen Werten für  $\alpha$  immer auch bedeutet, dass die beiden Dynamiken bei gleichen Abständen von ihren Gleichgewichtsindices verglichen werden, sind hier die Abstände vom Gleichgewicht nicht mehr identisch ( $\alpha - M_F^e(P) \neq \alpha - M_F^e(Q)$ ).

4. P und Q haben sowohl unterschiedliche Gleichgewichtsindices wie auch maximal mögliche Mobilitäten:  $\Rightarrow$  z.B.  $M_F^e(P) < M_F^e(Q)$ ,  $\alpha_{\max}(P) < \alpha_{\max}(Q)$ .

Die beiden Dynamiken liessen sich bei allen Werten  $\alpha \in (M_F^e(Q), \alpha_{\max}(P))$  vergleichen. Aus denselben Gründen wie bei Fall 3 ist ein solcher Vergleich nicht sinnvoll.

Im ersten Fall wäre ein Vergleich bei identischen Werten von  $\alpha$  sicher sinnvoll. Bei Fall zwei spielt jedoch schon die Art des Vergleichs eine Rolle. Sollen hier die Dynamiken bei identischen absoluten Abständen oberhalb ihres Gleichgewichtsindex verglichen werden, kann dies bei identischen  $\alpha$  erfolgen. Falls jedoch das Verhalten

der Periodenmobilität beim gleichen Prozentsatz des jeweils maximal möglichen Abstands oberhalb des Gleichgewichts ( $\alpha_{\max}(P) - M_F^e(P)$  respektive  $\alpha_{\max}(Q) - M_F^e(Q)$ ) interessiert, muss  $\alpha$  für die zu vergleichenden Dynamiken zwangsläufig unterschiedliche Werte annehmen. In den Fällen drei und vier ist ein Vergleich bei identischen  $\alpha$  komplett sinnlos. Ein solcher Vergleich würde die Periodenmobilität weder bei gleichen absoluten noch bei identischen relativen Abständen oberhalb des entsprechenden Gleichgewichts bestimmen. Hier wird sofort klar, dass ein sinnvoller Vergleich der Periodenmobilitäten bei unterschiedlichen  $\alpha$  erfolgen muss.

Im folgenden wird die Wahl des Schwellenwerts  $\alpha$  oberhalb des Gleichgewichts jeweils so getroffen, dass ein Vergleich der Periodenmobilitäten unterschiedlicher Übergangsmatrizen bei identischer prozentualer Abweichung von ihren Gleichgewichtsindices stattfindet. Der Schwellenwert  $\alpha$  wird also für jede Übergangsdynamik  $P$  individuell so festgelegt, dass der Vergleich der Periodenmobilitäten bei gleichem Prozentsatz  $\gamma$  der Differenz zwischen der jeweils maximal möglichen empirischen und der gleichgewichtigen Mobilität ( $\alpha_{\max}(P) - M_F^e(P)$ ) erfolgt:

$$(3-4) \quad \alpha = M_F^e(P) + \gamma \cdot (\alpha_{\max}(P) - M_F^e(P)), \quad \text{wobei } 0 < \gamma < 1.$$

Die Wahl von  $\gamma$  kann somit unabhängig von  $P$  getroffen werden. Da damit unterschiedliche Übergangsmatrizen beim selben Prozentsatz  $\gamma$  ihrer spezifischen Differenz zwischen maximal erreichbarer empirischer Mobilität und Gleichgewichtsindex verglichen werden, wird hier ein relativer Vergleich angestellt. Dieser relative Vergleich entspricht dem Vergleich bei identischen absoluten Distanzen oberhalb des jeweiligen Gleichgewichtsindex dann, wenn die zu vergleichenden Dynamiken gleich grosse Differenzen zwischen maximaler empirischer und gleichgewichtiger Mobilität ( $\alpha_{\max}(P) - M_F^e(P)$ ) aufweisen. Dies ist sicher immer dann der Fall, wenn die betrachteten Matrizen sowohl denselben Gleichgewichtsindex als auch dieselbe maximal mögliche empirische Mobilität  $\alpha_{\max}$  besitzen (Fall 1).<sup>72</sup>

---

<sup>72</sup> Für eine erweiterte Diskussion bezüglich relativem und absolutem Vergleich der Periodenmobilität sei auf Abschnitt 9.2.6 im Appendix verwiesen. Dort wird diese Thematik auch anhand von Beispielen illustriert.

### 3.5.2 Beispiele

Im folgenden soll der Ansatz anhand von Beispielen illustriert werden. Für diese Illustration wurde das Bartholomew-Funktional  $f_{ij} = |i - j|$  als Mobilitätsfunktional zur Bestimmung der jeweiligen Gleichgewichts- und Periodenindices benutzt.<sup>73</sup> Dazu werden die folgenden sechs Testmatrizen gewählt:

Dardanoni-Matrizen		
$P_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.35 & 0.05 \\ 0.35 & 0.4 & 0.25 \\ 0.05 & 0.25 & 0.7 \end{pmatrix}$	$P_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$	$P_3 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$
Periodenmobilitätskurven von $P_x$ und $P_2$ schneiden sich	perfekt mobile Matrix	approximative Identitätsmatrix
$P_x = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.55 & 0.05 \\ 0.55 & 0.4 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$	$P_{\text{mobil}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$	$P_{\text{ident}} = \begin{pmatrix} 0.998 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.998 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.998 \end{pmatrix}$

Die ersten drei Matrizen  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  wurden durch Dardanoni (1993) in die Diskussion eingebracht, um damit die Inkonsistenz zwischen verschiedenen Mobilitätsindices aufzuzeigen. Sie besitzen die Eigenschaft, den selben Bartholomew-Indexwert aufzuweisen.  $P_1$  und  $P_3$  teilen sogar die selben Werte des Index des Verlassens der gegenwärtigen Klasse, des Index der quadrierten Distanz wie auch des Prais'- und des Eigenwertindex. Zu diesen drei Beispielen wurden noch drei weitere Testmatrizen hinzugefügt. Die Transitionsmatrix  $P_x$  wurde gewählt um aufzuzeigen, dass sich die Rangierung verschiedener Übergangsdynamiken anhand der Periodenmobilität bei unterschiedlicher Wahl des Prozentsatzes  $\gamma$  zur Bestimmung des Schwellenwerts

<sup>73</sup> Im Anhang in Abschnitt 9.2.6 werden auch die Resultate der beiden anderen Funktionale aus Abschnitt 3.3.2 dargestellt. Zudem werden zwei zusätzliche Testmatrizen betrachtet.

durchaus auch ändern kann (vergleiche hierzu Abbildung 3-1).<sup>74</sup>  $P_x$  teilt mit  $P_1$  und  $P_3$  dieselben Werte aller drei Gleichgewichtsindices sowie des Prais'- und des Eigenwertindex. Die Matrix  $P_{\text{mobil}}$  enthält Zeilen, die ihrer invarianten Verteilung entsprechen. Übergangsmatrizen mit identischen Zeilen werden gewöhnlich als perfekt mobil bezeichnet, da die Wahrscheinlichkeit, sich in irgendeine Klasse zu bewegen, unabhängig davon ist, aus welcher Klasse gestartet wird. Die letzte Matrix  $P_{\text{ident}}$  ist ziemlich nahe bei der Identitätsmatrix und wird deswegen als Repräsentation eines Markovprozesses mit geringer Mobilität betrachtet. Zudem besitzen alle Testmatrizen dieselbe invariante Verteilung  $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)'$ .

		Übergangsmatrizen					
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_x$	$P_{\text{mobil}}$	$P_{\text{ident}}$
Gleichgewichtsindex <sup>a</sup>		0.467	0.467	0.467	0.467	0.889	0.002667
Periodenindex <sup>a</sup> $\gamma = 0.5$		0.455	0.549	0.755	0.472	0.784	0.063
"Konvergenzindices"	Prais' Index <sup>b</sup>	0.65	0.6	0.65	0.65	1	0.003
	Eigenwertindex <sup>b</sup>	0.65	0.6	0.65	0.65	1	0.003
	Index des zweitgrößten Eigenwerts <sup>b</sup>	0.385	0.427	0.4	0.15	1	0.003
	Asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit <sup>b</sup>	0.487	0.557	0.511	0.163	$+\infty$	0.003005
	Determinantenindex <sup>b</sup>	0.948	0.87	0.94	0.8725	1	0.005991
	$\alpha_{\max}(P)$ <sup>a</sup>	2	2	4/3	2	2	2
Gleichgewichtsverteilung		$(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3})'$	$(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3})'$	$(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3})'$	$(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3})'$	$(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3})'$	$(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3})'$

<sup>a</sup> Bartholomew-Mobilitätsfunktional  $f_{ij} = |i - j|$

<sup>b</sup> Die Definitionen dieser Indices finden sich in Tabelle 3-1

**Tabelle 3-3:** Mobilitätsindices und Charakteristika der Beispielmatrizen

Da alle Matrizen mit Ausnahme von  $P_3$  strikt positive Elemente besitzen, ist deren  $\alpha_{\max}$  identisch, gleich  $\alpha_{\max}^*$  und hat den Wert 2. Ein Kreispfad, der diesen Wert gene-

<sup>74</sup> Dieses Phänomen lässt sich durchaus auch mit monotonen Matrizen zeigen. Die nicht-monotone Dynamik  $P_x$  wurde gewählt, weil das Phänomen hier besonders deutlich sichtbar wird.

riert, ist  $\{1,3,1\}$ . Das Element  $(1,3)$  der Übergangsmatrix  $P_3$  ist gleich null, so dass eine Bewegung von Zustand 1 nach 3 innerhalb einer Periode nicht möglich ist. In diesem Fall wird  $\alpha_{\max}$  zum Beispiel durch den Kreispfad  $\{1,2,3,1\}$  erreicht und ist somit gleich  $4/3$ .<sup>75</sup> In Tabelle 3-3 sind alle Charakteristika der Testmatrizen zusammengefasst.

In der folgenden Diskussion wird mit  $\prec_e$  und  $\prec_p$  die Beziehung "weniger mobil als" bezeichnet, wobei die Indices e und p bedeuten, dass die Relation bezüglich dem Gleichgewichts- respektive dem Periodenindex definiert ist. Der Gleichgewichtsindex, hier Bartholomew's Mobilitätsindex, führt zur folgenden Reihung wobei  $\approx_e$  Gleichheit bedeutet:

$$P_{\text{ident}} \prec_e P_1 \approx_e P_2 \approx_e P_3 \approx_e P_x \prec_e P_{\text{mobil}} .$$

Gemäss dem Gleichgewichtsindex ist  $P_{\text{ident}}$  der am wenigsten mobile Prozess, gefolgt von den hinsichtlich diesem Index gleichwertigen  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_x$ .  $P_{\text{mobil}}$  ist deutlich der mobilste Prozess. Diese Reihung ist auch aus Tabelle 3-3 ersichtlich.

Für jedes  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ) mit dem zugehörigen Schwellenwert  $\alpha$  für die Messung der Periodenmobilität wird die Gleichung  $M_F^e(P_{\beta(\alpha)}) = \alpha$  numerisch nach  $\beta$  gelöst. Dieses  $\beta(\alpha)$  wird dann zur Bestimmung der relativen Entropie von  $P_{\beta(\alpha)}$  bezüglich  $P$  und somit zur Berechnung des korrespondierenden Periodenindex benötigt (vergleiche Theorem 3-2). Da die involvierten Funktionen strikt konvex sind und deshalb ein eindeutiges Supremum besitzen, sind die vorgenommenen Berechnungen mit keinerlei numerischen Komplikationen verbunden. In Abbildung 3-1 ist der Periodenmobilitätsindex als Funktion von  $\gamma$  aufgezeichnet.

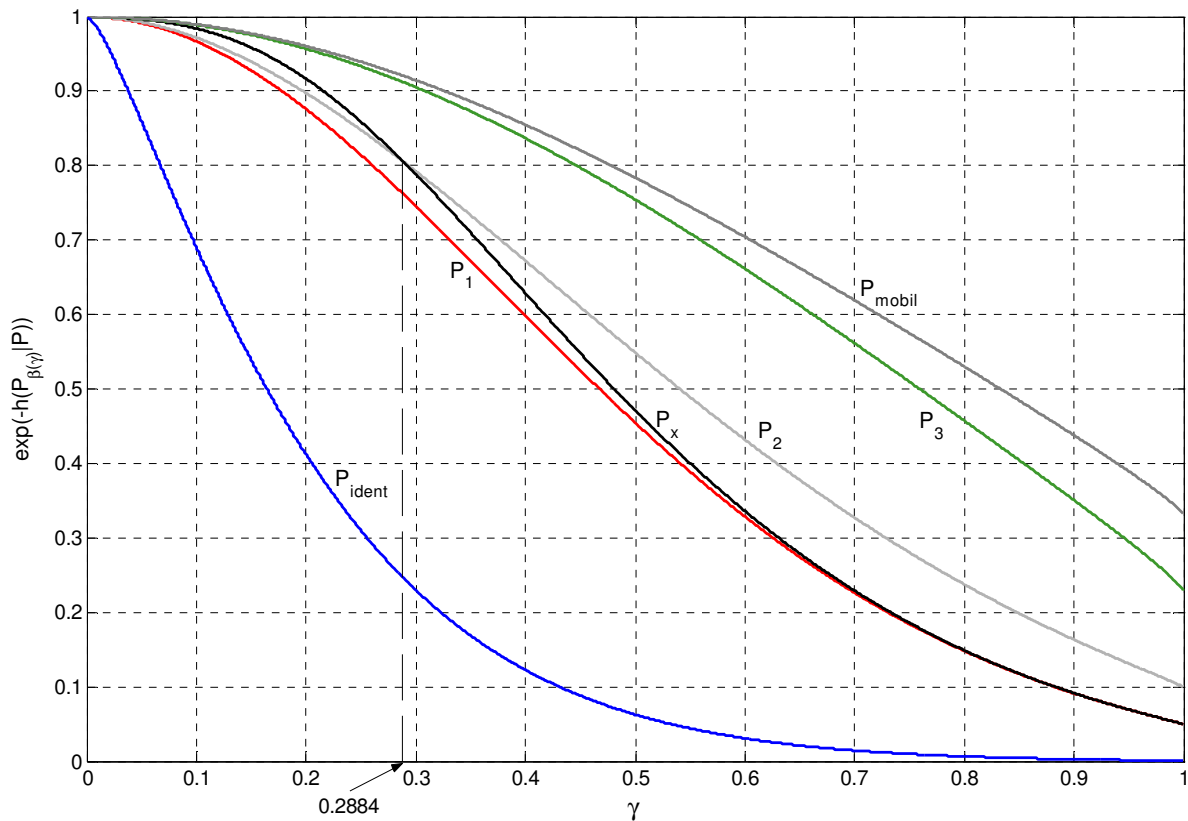
Gemäss der Periodenmobilität stellt sich heraus, dass die Ordnungsrelation der Matrizen  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_{\text{mobil}}$  und  $P_{\text{ident}}$  über den gesamten Definitionsbereich von  $\gamma$  erhalten bleibt. Dass dem nicht zwingend so sein muss zeigt die Schnittstelle der Dynamiken

---

<sup>75</sup> Zur Bestimmung der maximal möglichen empirischen Mobilität  $\alpha_{\max}$  sei auf die Beispiele in Abschnitt 9.2.5 im Anhang verwiesen.



$P_2$  und  $P_x$  bei  $\gamma = 0.2884$ . Bei kleineren Werten von  $\gamma$  erweist sich  $P_x$  als mobiler, bei grösseren  $\gamma$  ist  $P_2$  die mobilere Dynamik.



**Abbildung 3-1:** Periodenmobilitäten der Beispielmatrizen

Bei Werten von  $\gamma < 0.2884$  ergibt sich somit die folgende Rangierung gemäss der Periodenmobilität:

$$P_{\text{ident}} \prec_p P_1 \prec_p P_2 \prec_p P_x \prec_p P_3 \prec_p P_{\text{mobil}} .$$

Bei Werten von  $\gamma > 0.2884$  lautet die Rangfolge wie folgt:

$$P_{\text{ident}} \prec_p P_1 \prec_p P_x \prec_p P_2 \prec_p P_3 \prec_p P_{\text{mobil}} .$$

Da die Dynamiken  $P_2$  und  $P_x$  positiv sind und denselben Gleichgewichtsindex teilen, entsprechen sich bei einem Vergleich der Periodenmobilitäten die relative und die absolute Optik. Der Schnittpunkt entspricht einem Schwellenwert von  $\alpha = 0.9089$ . Für  $\alpha \in (M_F^e(P), 0.9089)$  ist die Wahrscheinlichkeit für fortgesetzte grosse Abweichungen

der empirischen Mobilität für die Dynamik  $P_x$  grösser. Da  $P_x$  insgesamt weniger Gewicht auf der Hauptdiagonalen aufweist als  $P_2$  und insbesondere wegen der sehr hohen Übergangswahrscheinlichkeiten von jeweils 55% der Übergänge  $\{1,2\}$  und  $\{2,1\}$  erscheint dies nicht weiter erstaunlich. Für  $\alpha \in (0.9089, \alpha_{\max}(P))$  ist die Chance fortgesetzter grosser Abweichungen für  $P_2$  grösser. Auch dieser Sachverhalt lässt sich intuitiv begründen. Erstens trägt für alle  $\alpha > 1$  das blosses Überspringen einer einzigen Klassengrenze nicht mehr zur Erhöhung der empirischen Mobilität bei. Die hohe Wahrscheinlichkeit der Übergänge  $\{1,2\}$  und  $\{2,1\}$  der Matrix  $P_x$ , durch das Bartholomew-Funktional mit dem Gewicht 1 versehen, helfen somit in diesem Bereich von  $\alpha$  nicht mehr, die Wahrscheinlichkeit fortgesetzter grosser Abweichungen der empirischen Mobilität auf einem hohen Niveau zu halten. Zweitens weist die Dynamik  $P_2$  über die höheren Wahrscheinlichkeiten für das Überspringen zweier Klassen auf (Übergänge  $\{1,3\}$  und  $\{3,1\}$ ). Diese Übergänge erhalten durch das Bartholomew-Funktional das Gewicht 2 und tragen somit in diesem Bereich von  $\alpha$  dazu bei, dass die Wahrscheinlichkeit fortgesetzter grosser Abweichungen im Vergleich mit  $P_x$  erhöht ist. Somit erscheint auch das Verhalten der Periodenmobilitäten oberhalb von  $\alpha = 0.9089$  plausibel.<sup>76</sup> Bei dieser kurzen Analyse des Verhaltens der Dynamiken  $P_2$  und  $P_x$  hinsichtlich ihrer Periodenmobilität wird deutlich, dass der hier vorgestellte Ansatz der Mobilitätsmessung über ein Mobilitätsfunktional den Gehalt der Analyse deutlich vertieft. Ohne die Bewertungen von Einkommensklassenwechseln durch das Funktional liesse sich der Schnittpunkt der beiden Periodenmobilitätskurven nicht intuitiv erklären. In den Kapiteln 8 und 9 finden sich weitere Mobilitätsdiskussionen, die diesen Vorteil verdeutlichen.

In Tabelle 3-3 sind die jeweiligen Werte des Periodenindex für den willkürlichen Wert von  $\gamma = 0.5$  berechnet worden. Dies bedeutet, dass die Periodenmobilität bei einem Schwellenwert  $\alpha$  gemessen wird, welcher genau in der Mitte des entspre-

---

<sup>76</sup> Im Anhang in Abschnitt 9.2.6.4 findet sich eine ausführlichere Diskussion über die Periodenmobilitätskurven der Dynamiken  $P_2$  und  $P_x$ . Dieser Vergleich der Periodenmobilitäten wird dort über den gesamten möglichen Definitionsbereich für den Schwellenwert  $\alpha$  zur Bestimmung der Periodenmobilität ( $\alpha \in (0, \alpha_{\max}(P))$ ) angestellt.

chenden  $\alpha_{\max}$  und dem Wert des zugehörigen Gleichgewichtsindex liegt. In anderen Worten ausgedrückt wird der Periodenindex bei 50 % der maximal möglichen Distanz der empirischen Mobilität vom Gleichgewicht gemessen. Auch beim Periodenindex ist  $P_{\text{mobil}}$  der mobilste Prozess. Unabhängig vom gewählten Schwellenwert  $\alpha$  sind die Wahrscheinlichkeiten für weitere Bewegung und somit weitere Mobilität unter diesem Prozess am grössten.  $P_{\text{ident}}$  ist auch hier der Prozess dem die geringste Mobilität innewohnt. Bei den Dardanoni-Matrizen können nun aussagekräftige und konkrete Aussagen hinsichtlich der beiden Aspekte der Mobilität gemacht werden. Während sich die Matrizen hinsichtlich ihrer Gleichgewichtsmobilität nicht unterscheiden ist es hingegen möglich, sie in Bezug auf ihre Periodenmobilität zu rangieren. Aus Tabelle 3-3 geht bei einem Niveau  $\gamma$  von 50 % der maximal möglichen Distanz zwischen empirischer und gleichgewichtiger Mobilität hervor, dass  $P_3$  der deutlich mobilste Prozess ist, während  $P_1$  die geringste Mobilität der drei Matrizen beinhaltet.

Tabelle 3-3 enthält auch eine Übersicht über die Resultate für alle in dieser Arbeit erwähnten Konvergenzindices. Zur Verdeutlichung der Relevanz des hier vorgestellten Ansatzes sei auf die in Tabelle 3-4 vorgenommene Auflistung für die Dardanoni-matrizen inklusive der Dynamik  $P_x$  hingewiesen. Dabei bedeuten  $\prec_c$  und  $\approx_c$  "weniger mobil als" respektive "gleich mobil wie" hinsichtlich konventioneller Konvergenzindices.

Mobilitätsindex	resultierende Rangfolge
Bartholomew-/Gleichgewichtsindex	$P_1 \approx_e P_2 \approx_e P_3 \approx_e P_x$
Periodenindex, $\gamma = 0.5$	$P_1 \prec_p P_x \prec_p P_2 \prec_p P_3$
Prais' Index <sup>a</sup>	$P_2 \prec_c P_1 \approx_c P_3 \approx_c P_x$
Eigenwertindex <sup>a</sup>	$P_2 \prec_c P_1 \approx_c P_3 \approx_c P_x$
Index des zweitgrössten Eigenwerts <sup>a</sup>	$P_x \prec_c P_1 \prec_c P_3 \prec_c P_2$
Asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit <sup>a</sup>	$P_x \prec_c P_1 \prec_c P_3 \prec_c P_2$
Determinantenindex <sup>a</sup>	$P_2 \prec_c P_x \prec_c P_3 \prec_c P_1$

<sup>a</sup> Die Definitionen dieser Indices finden sich in Tabelle 3-1

**Tabelle 3-4:** Rangfolge der Dardanoni-matrizen (inklusive  $P_x$ ) unter diversen Mobilitätsindices

Während sich die Dardanonimatrizen durch den gewählten Gleichgewichtsindex nicht unterscheiden lassen, sind die Matrizen jedoch hinsichtlich ihrer Konvergenzmobilität unterscheidbar und lassen sich durch alle Konvergenzindices zumindest teilweise rangieren. Wird jedoch eine Analyse beider Aspekte der Mobilität angestrebt, so sind die Resultate äusserst willkürlich und hängen stark von der gewählten Kombination aus Gleichgewichts- und Konvergenzindex ab. Der hier präsentierte Ansatz vermag diese Willkür beträchtlich zu reduzieren. Hier ist nur noch die Wahl des Mobilitätsfunktional willkürlich. Wie im Beispiel Anhand der Dynamiken  $P_2$  und  $P_x$  aufgezeigt, kann auch die Wahl von  $\gamma$ , dem Prozentsatz der maximal möglichen Distanz zwischen empirischer und gleichgewichtiger Mobilität, bei dem die Periodenmobilität gemessen werden soll, eine gewisse Beliebigkeit ins Spiel bringen.<sup>77</sup> Oft ist die Willkür jedoch auf die Wahl des Mobilitätsfunktional beschränkt. Ist dieser Entscheid in solchen Fällen erst einmal getroffen, dann ist das Indexpaar zur Bewertung der beiden Aspekte der Mobilität festgelegt und der Beliebigkeit ist ein Ende gesetzt. Kommt es bei einem Mobilitätsvergleich trotzdem zu Überschneidungen der Periodenmobilitätskurven zweier Dynamiken, dann ermöglicht das hier vorgeschlagene Vorgehen, da der Schnittpunkt der Mobilitätskurven bestimmt werden kann, dennoch eine vertiefte Diskussion der beiden Mobilitätsaspekte (vergleiche die Diskussion in Abschnitt 9.2.6.4 im Anhang). Diese Art der Mobilitätsanalyse ist umfassender als konventionelle Analysen und vertieft den Gehalt von Aussagen zur Mobilität von Markovprozessen.

---

<sup>77</sup> In Abschnitt 8.4.3 wird demonstriert, dass bei empirischen Untersuchungen der Einkommensdynamik anhand von Paneldaten implizit ein Schwellenwert  $\alpha$  durch die Daten gegeben ist. Wird die Periodenmobilität bei diesem impliziten Schwellenwert gemessen, so ist auch die mögliche Willkür bei der Festlegung von  $\alpha$  eliminiert.

### 3.6 SCHLUSSBETRACHTUNGEN

In diesem Kapitel wurde zwischen zwei Aspekten bei Betrachtungen zur Mobilität von Markovketten unterschieden:

- Mobilität, die im Gleichgewicht eines Markovprozesses auftritt.
- Mobilität, die mit der Konvergenz des Prozesses zu seinem Gleichgewicht einhergeht.

Als Konsequenz der beiden Mobilitätsaspekte wird ein Paar von miteinander verbundenen Indices vorgeschlagen, von denen jeder je einen der beiden Aspekte misst. Bei den bisher in der Literatur gebräuchlichen Indices kann oft problemlos eine Kombination von einem Gleichgewichtsindex mit irgend einem die Konvergenzgeschwindigkeit messenden Index gefunden werden, mit der sich eine vom Forscher bewusst oder unbewusst gewünschte Aussage stützen lässt. Diese Art der Willkür ist beim hier vorgeschlagenen Indexpaar ausgeschlossen, da die beiden Teilindices durch die Wahl eines Mobilitätsfunktionalen eng miteinander verknüpft sind.

Kapitel 3 hat aufgezeigt, wie die Wahl eines Mobilitätsfunktionalen simultan einen Gleichgewichts- und einen Periodenmobilitätsindex bestimmt. Der Gleichgewichtsindex wird definiert als Erwartungswert des Mobilitätsfunktionalen hinsichtlich der gleichgewichtigen Verteilung der zugrundeliegenden Einkommensdynamik. Der Periodenindex ist verknüpft mit der Geschwindigkeit, mit welcher die empirische Mobilität gegen den entsprechenden Gleichgewichtsindex konvergiert. Bei einem gegebenen Schwellenwert für Abweichungen der empirischen Mobilität oberhalb des Gleichgewichtsindex wurde gezeigt, dass diese Konvergenz mit einer exponentiellen Rate stattfindet, welche als relative Entropie einer an diesen Schwellenwert angepassten Übergangsmatrix hinsichtlich der zugrundeliegenden Übergangsdynamik ausgedrückt werden kann. Es wurde auch aufgezeigt, wie sich diese relative Entropie und somit die Konvergenzrate wie auch der damit verbundene Periodenindex berechnen lassen. Wegen der erwähnten Reduktion der Willkür bei der Berechnung beider Mobilitätsaspekte, der verbesserten Interpretierbarkeit der Resultate und weil sich diese Berechnungen einfach implementieren lassen wird vorgeschlagen, bei empirischen Untersuchungen jeweils den Gleichgewichts- und den Periodenindex anzugeben.

Dadurch wird garantiert, dass bei Untersuchungen zur Mobilität beide Mobilitätsaspekte erfasst werden.

Die Messung der Mobilität wurde hier auf die Spezifikation eines Mobilitätsfunktional reduziert. Diese Art des Vorgehens bietet mehrere Vorteile:

- Die wertende Gewichtung von Bewegungen zwischen Zuständen (Einkommensklassen) erscheint als logischer Ausgangspunkt. Dadurch wird auch die Interpretation der Mobilität wesentlich vereinfacht. Die Bewertung von Bewegungen zwischen Zuständen ist wesentlich transparenter als Diskussionen über das passende Mobilitätsindex-Funktional auf der Menge der Übergangsmatrizen.
- Bei der Messung beider Aspekte der Mobilität wird die Willkür erheblich reduziert, da die Wahl des Mobilitätsfunktional die beiden Indices simultan festlegt. Die arbiträre Kombination konventioneller Indices lässt zu viel Spielraum offen.
- Die Techniken grosser Abweichungen lassen sich ohne weiteres auf allgemeinere Zustandsräume und Markovprozesse erweitern. So lassen sich beide Mobilitätsindices für das Funktional der quadrierten Distanz problemlos auf ARMA Prozesse erweitern.
- Der Ansatz der Mobilitätsmessung mittels eines Mobilitätsfunktional vertieft die Diskussion bei Mobilitätsvergleichen sowohl bei der gleichgewichtigen respektive der empirischen Mobilität (vergleiche z.B. Abschnitt 8.4.2.3) wie auch bei der Periodenmobilität (vergleiche z.B. Abschnitt 9.2.6.4).
- Sowohl der Gleichgewichts- als auch der zugehörige Periodenindex lassen sich direkt aus einem Datenpanel schätzen, ohne dass zuvor die Übergangsmatrix abgeschätzt werden muss (vergleiche hierzu die Abschnitte 8.4.2 und 8.4.3).

Der hier vorgestellte Ansatz trägt zu einem vertieften Verständnis des Mobilitätsphänomens bei und verbessert so die Interpretierbarkeit sowie die Vergleichbarkeit bei empirischen Anwendungen. Durch Restriktion der Klasse der Mobilitätsfunktionale auf sogenannte (2)-fallende Funktionale lassen sich, für die korrespondierenden Gleichgewichtsindices, interessante Verbindungen zu in der Literatur etablierten Kriterien und Ordnungsrelationen für die Mobilität monotoner Transitionsmatrizen mit identischer Gleichgewichtsverteilung herstellen. Solche Indices sind konsistent mit

Dardanoni's (1993) partieller Ordnungsrelation, Conlisk's (1990) schwachem D-Kriterium wie auch mit Shorrocks' (1978) Monotoniekriterium. Damit erfüllen sie in diesen Fällen alle Persistenzkriterien (Geweke, Marshall und Zarkin (1986)).





## **II EMPIRISCHER TEIL**



## 4 DIE DATENSÄTZE

Für die empirischen Untersuchungen wurden zwei Datensätze für die USA benutzt. Es handelt sich dabei um das March Current Population Survey (CPS) und die Panel Study of Income Dynamics (PSID). Um mögliche Einflüsse von Konjunkturzyklen auf das Einkommen und die Einkommensungleichheit bei Untersuchungen zu Verteilungseffekten der Einkommensbildung möglichst auszuschliessen, schlugen Burkhauser, Cutts, Daly und Jenkins (1999) vor, Einkommensverteilungen zu zwei Zeitpunkten ähnlichen konjunkturellen Zustands zu vergleichen. Konsequenterweise untersuchten sie die Einkommensverteilungen der USA 1979 und 1989, also für zwei konjunkturelle Höhepunkte der US-Ökonomie. Im empirischen Teil dieser Arbeit wird dieses Schema beibehalten. Die Querschnittsdaten der CPS-Studie werden dabei dazu benutzt, die für die Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie benötigten Randverteilungen abzuschätzen. Die Paneldaten des PSID-Datensatzes dienen dann in Kapitel 5 der Erstellung einer Anfangshypothese der zu schätzenden Einkommensdynamik, welche dann, zur Verbesserung ihrer Aussagekraft, an die beobachteten Randverteilungen angepasst wird. Zudem werden die PSID-Daten in Kapitel 7 dazu benutzt, den Prozess der Einkommensdynamik zwischen Männern und Frauen zu vergleichen.

### 4.1 CURRENT POPULATION SURVEY (BURKHAUSER-DATEN)

Für die Bestimmung der benötigten Randverteilungen wurde derselbe Datensatz wie bei Burkhauser et al. (1999) benutzt.<sup>78</sup> Diese Daten stammen aus dem March Current Population Survey (CPS) und basieren auf dem Haushaltseinkommen in 1989 US-Dollars vor Steuern, jedoch nach Transfers. Im CPS-Datensatz werden Haushaltsmitglieder ab dem 15. Altersjahr berücksichtigt. Unter Verwendung einer Äquivalenzskala mit Elastizität 0.5 (Quadratwurzel-Skala) wurden die Haushaltseinkommen

---

<sup>78</sup> Die Daten wurden verdankenswerterweise von R.V. Burkhauser, A.C. Cutts, M.C. Daly und S.P. Jenkins zur Verfügung gestellt.

in individuelle Einkommen umgewandelt.<sup>79</sup> Um die Stichprobe der Grundgesamtheit anzupassen wurde in allen Berechnungen auch das mit jeder Beobachtung assoziierte Gewicht berücksichtigt. So wird die jeweilige Stichprobe auf die entsprechende Gesamtbevölkerung der USA extrapoliert. Im Gegensatz zu Burkhauser et al. wurden die Daten um das allgemeine ökonomische Wachstum bereinigt durch Korrektur der 1979'er Daten auf den Mittelwert der 1989'er Daten. Tabelle 4-1 fasst die statistischen Eckdaten des umgeformten Burkhauser-Datensatzes zusammen.

<b>Zusammenfassende Statistiken</b>		
	<b>1979</b>	<b>1989</b>
<b>Stichprobengrösse</b>	65'238	59'941
<b>extrapolierte Grundgesamtheit</b>	218'100'210	246'191'486
<b>Mittelwert</b>	23'061	23'061
<b>Median</b>	20'254	19'315
<b>Standardabweichung</b>	15'672	17'753

**Tabelle 4-1:** Statistische Kenngrößen der CPS-Daten

## 4.2 PANEL STUDY OF INCOME DYNAMICS

Die Datensätze der Panel Study of Income Dynamics (PSID) sind allgemein über Internet zugänglich.<sup>80</sup> Für diese Arbeit diente der Datensatz "1968-1993 individual file" als Grundlage. Er enthält neben einer Vielzahl anderer Daten auch die Jahreseinkommen von 53'013 Individuen in den Jahren 1967 bis 1992.

In einem ersten Schritt wurden die in Tabelle 4-2 präsentierten Variablen mit dem Statistikpaket SAS 6.12 aus dem Rohdatensatz extrahiert und in eine Matlab-kompatible Form gebracht.<sup>81</sup> Da die Variablen zur Bestimmung der Einkommensar-

---

<sup>79</sup> Zur Bestimmung des für alle Haushaltsmitglieder identischen Individualeinkommens wird das Haushaltseinkommen durch die Quadratwurzel der Anzahl Haushaltsmitglieder dividiert. Diesem Vorgehen liegt die Überlegung zugrunde, dass die Haushaltsausgaben mit steigender Anzahl Haushaltsmitglieder unterproportional zunehmen.

<sup>80</sup> Internet-Adresse: <http://www.isr.umich.edu/src/psid/maindata.html>; Datei 68\_93ind.zip.

<sup>81</sup> Eine ausführlichere Beschreibung der verwendeten Variablen findet sich in Abschnitt 9.3.1 des Anhangs.

ten (v30327, v30334, v30658, v30663) mit der Zahl 0 jeweils die Aussage "kein Einkommen" wie auch die sogenannten "missing values" bezeichnen, mussten letztere zuerst durch ein mühsames Prozedere unter Zuhilfenahme der Eliminationsvariablen (vergleiche Tabelle 4-2) aus dem Datensatz entfernt werden. Dasselbe trifft auf die Variablen für den entsprechenden Einkommensbetrag (v30328, v30335, v30659, v30669) zu, bei denen mit der Zahl 0 jeweils Einkommen von 0 Dollar als auch "missing values" bezeichnet werden.

	Spalte	Variable	Bedeutung
Variablen 1979 / 1980	1	v30315	Beziehung zum Haushaltsvorstand 1980
	2	v30316	Alter im Jahr 1980
	3	v30327	Art des 1979 erwirtschafteten steuerbaren Einkommens
	4	v30328	Gesamtes 1979 erwirtschaftetes steuerbares Einkommen
	5	v30330	Arbeitsstunden im Jahr 1979
	6	v30334	Art des 1979 erhaltenen Transfereinkommens
	7	v30335	Gesamtes 1979 erhaltenes Transfereinkommen
	8	v30342	Gewicht des Individuums
Variablen 1989 / 1990	9	v30644	Beziehung zum Haushaltsvorstand 1990
	10	v30645	Alter im Jahr 1990
	11	v30658	Art des 1989 erwirtschafteten steuerbaren Einkommens
	12	v30659	Gesamtes 1989 erwirtschaftetes steuerbares Einkommen
	13	v30661	Arbeitsstunden im Jahr 1989
	14	v30663	Art des 1989 erhaltenen Transfereinkommens
	15	v30669	Gesamtes 1989 erhaltenes Transfereinkommen
	16	v30686	Gewicht des Individuums
Allgemein	17	v30000	Release Nummer
	18	v30002	Personennummer
	19	v32000	Geschlecht des Individuums
Eliminations- variablen	20	v30001	1968 Interview Nummer
	21	v30313	1980 Interview Nummer
	22	v30314	1980 Sequenznummer
	23	v30318	Indikator Familieneinzug / -auszug 1980
	24	v30642	1990 Interview Nummer
	25	v30643	1990 Sequenznummer
	26	v30649	Indikator Familieneinzug / -auszug 1990

**Tabelle 4-2:** PSID-Variablen

Nachdem der Datensatz so von 53'013 auf 11'425 Individuen reduziert wurde mussten noch 36 Personen eliminiert werden, weil sie widersprüchliche Angaben zu ihren Einkommensverhältnissen gemacht hatten. Von den verbleibenden 11'389 Individuen wurden nun die über 15-jährigen extrahiert, welche jeweils 1979 und 1989 ein positives Einkommen (Summe des im jeweiligen Jahr erwirtschafteten steuerbaren Ein-

kommens sowie des erhaltenen Transfereinkommens) erzielten.<sup>82</sup> Dadurch reduzierte sich die Stichprobenanzahl weiter auf 6'775 Personen. Diese Stichprobe dient dann in Kapitel 5 als Basis zur Bestimmung der ursprünglichen Hypothese über die Einkommensdynamik in den USA während der Zeitspanne 1979 bis 1989. Um die Vergleiche im Prozess der Einkommensverteilung zwischen Männern und Frauen (vergleiche Kapitel 7) durchführen zu können, wurden die 6'775 Individuen noch nach ihrem Geschlecht gegliedert. Die so erhaltenen Einkommen der resultierenden drei Datensätze wurden, wie bei den CPS-Daten, auch hier auf den Mittelwert der 89'er Daten des Burkhauser-Datensatzes korrigiert. In Tabelle 4-3 sind die resultierenden statistischen Daten dieser drei Datensätze wiedergegeben.

<b>Zusammenfassende Statistiken</b>						
	<b>Männer und Frauen</b>		<b>Männer</b>		<b>Frauen</b>	
	<b>1979</b>	<b>1989</b>	<b>1979</b>	<b>1989</b>	<b>1979</b>	<b>1989</b>
<b>Stichprobengrösse</b>	6'775	6'775	3'386	3'386	3'389	3'389
<b>Mittelwert</b>	23'061	23'061	23'061	23'061	23'061	23'061
<b>Median</b>	17'746	16'953	20'050	18'244	19'197	17'425
<b>Standardabweichung</b>	21'795	31'104	18'315	27'416	19'022	32'258

**Tabelle 4-3:** Statistische Kenngrössen der PSID-Daten

---

<sup>82</sup> Da bei Burkhauser et. al. (1999) keine weiteren Einschränkungen gemacht wurden, wurden auch hier, im Gegensatz zu den im Anhang in Abschnitt 9.4 präsentierten Resultaten der Arbeit von Aebi, Neusser und Steiner (1999), keine weiteren Restriktionen auferlegt.

## 5 BESSERE ÜBERGANGSDYNAMIKEN DURCH EINBEZUG VON QUERSCHNITTSDATEN

### 5.1 EINLEITUNG

In diesem Kapitel soll demonstriert werden, wie die Qualität von regulär aus Paneldaten geschätzten Übergangsmatrizen verbessert werden kann. Dies geschieht durch den Einbezug der Information aus Querschnittsverteilungen. Da Querschnitte in der Regel wesentlich mehr Individuen umfassen als Paneldaten entspricht dieses Vorgehen einer Erhöhung des Informationsgehalts und somit einer Verbesserung der Schätzung der Übergangsdynamik. Das in diesem Abschnitt praktizierte Vorgehen entspricht zugleich der naheliegendsten Anwendungsmöglichkeit der in Kapitel 2 vorgestellten Theorie. Dabei werden die Zelhäufigkeiten einer aus Paneldaten generierten zweidimensionalen Dichtematrix an viel umfangreichere Querschnittsverteilungen angepasst.

Die jüngsten Veränderungen in der Einkommensverteilung der USA und anderer Staaten führten zu einer lebendigen Debatte über die wahrscheinlichsten Erklärungsgründe dieser Entwicklung. Ein Merkmal, dem relativ viel Aufmerksamkeit zugestanden wurde, war die beobachtete Verkleinerung der Mittelklasse. Burkhauser, Cutts, Daly und Jenkins (1999) gingen diese Thematik an, indem sie sich auf statistische Schlussfolgerungen und die Messung von Veränderungen der Einkommensverteilung beschränkten. Sie argumentierten, dass sensitive Schlussfolgerungen nur dann gezogen werden können, wenn die Veränderungen zwischen Jahren verglichen werden, in denen sich die Ökonomie hinsichtlich Konjunkturzyklen im selben Zustand befand. Konsequenterweise verglichen sie die US-Einkommensverteilung zu zwei konjunkturellen Höhepunkten, d.h. 1979 und 1989. Obschon sie signifikante Anstiege in beiden Enden der Einkommensverteilung fanden, wurde die mit Abstand grösste Zunahme in den oberen Einkommenssegmenten festgestellt. Dieses Bild korrespondiert allerdings mit der Tatsache, dass die Autoren die Problematik von einem absoluten Standpunkt angingen, indem sie nicht um das allgemeine ökonomische Wachstum korrigierten.

Da die Studie von Burkhauser et al. (1999) nichts über die zugrunde liegende Einkommensdynamik aussagt, bleibt sie unvollständig. Eine Einschätzung der beobachteten erhöhten Ungleichheit muss jedoch das Ausmass der sozialen Mobilität berücksichtigen. Dies ist natürlich leichter gesagt als getan. Wegen der langen Zeitspanne zwischen den Spitzen der Konjunkturzyklen existiert ein grosses Problem der Datenauswertung. Mit zunehmender Länge der betrachteten Periode steigt logischerweise die Schwierigkeit, eine repräsentative Stichprobe aus einer longitudinalen Datenbank wie der Panel Study of Income Dynamics (PSID) zu erhalten.

Um diese Lücke zu schliessen wird anhand der in Kapitel 2 eingeführten Methodik dargestellt, wie vernünftige Abschätzungen der Einkommensdynamik aus einer Kombination von Panel- und Querschnittsdaten gewonnen werden können. Konkret werden die Paneldaten zur Schätzung einer Hypothese über die Einkommensdynamik verwendet. Die Methode der Minimierung der relativen Entropie dient dann dazu, diese ursprüngliche Hypothese an die aus Querschnittsdaten geschätzten Einkommensverteilungen optimal anzupassen. Dies entspricht einer Qualitätsverbesserung, da Querschnittsdaten normalerweise eine grössere Anzahl Individuen umfassen als Paneldaten. Diese in den Querschnittsdaten enthaltene zusätzliche Information wird durch die angewandte Methode in die Dynamik eingebracht.

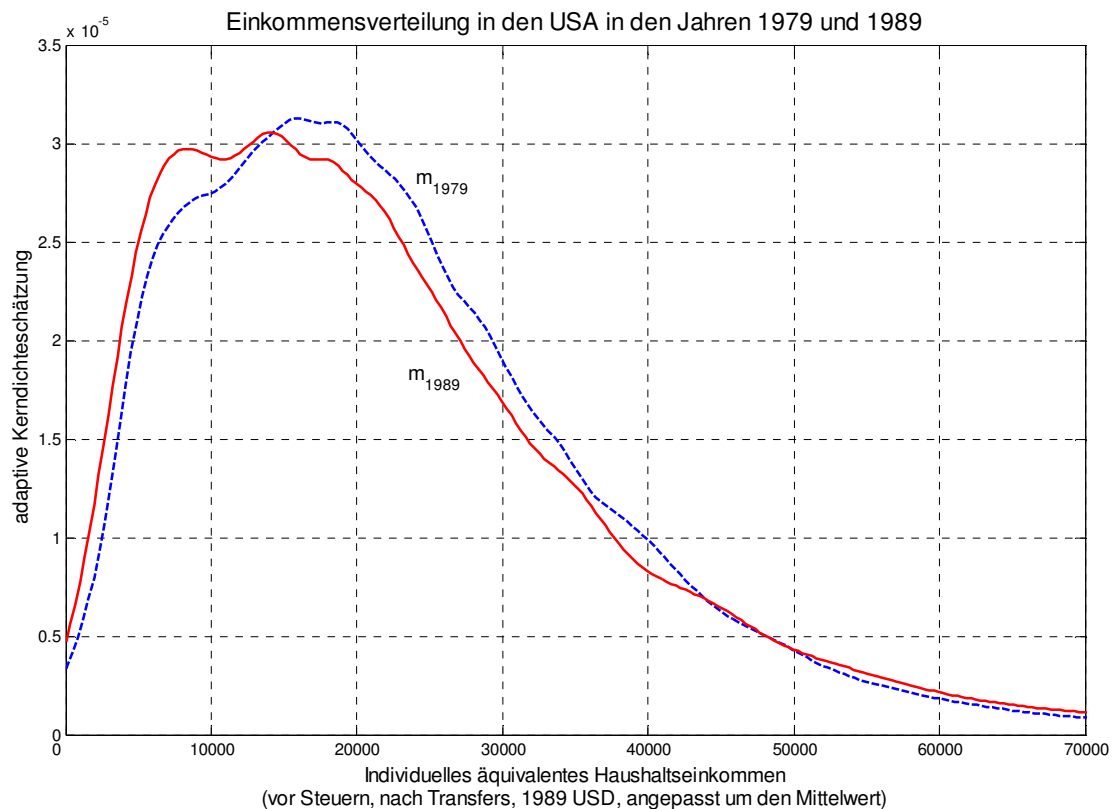
Wie in Abschnitt 2.5 erläutert führt der Ansatz zu einem statistischen Test, welcher Schlussfolgerungen über die ursprüngliche Hypothese ermöglicht. Der Test zeigt an, ob die zusätzliche Information in den Querschnittsdaten zu einer signifikanten Anpassung der ursprünglichen Hypothese führt. Da die Anpassung die Interpretation einer Projektion besitzt, befindet sich die angepasste Hypothese, aus Sicht der ursprünglichen Hypothese, immer "näher" an der wahren, jedoch unbeobachtbaren Dynamik. Deshalb wird, unabhängig vom Resultat dieses statistischen Tests, für die Berechnung von Massen zur Beschreibung wichtiger Aspekte der zeitlichen Entwicklung der Einkommensdynamik immer von der angepassten Hypothese ausgegangen. Dieses Vorgehen wird auch dadurch gerechtfertigt, dass die Anpassung der ursprünglichen Hypothese an die beobachteten Einkommensquerschnitte teilweise zu signifikanten Verbesserungen der Schätzung von Mobilitätsindices führt (vergleiche Abschnitt 8.4).



Die in Kapitel 2 vorgestellte Methodik wird auf den von Burkhauser et al. (1999) verwendeten Datensatz angewandt. Es wird gezeigt, wie eine aus dem PSID-Datensatz geschätzte Übergangsmatrix an die zusätzlich im repräsentativen Datensatz von Burkhauser et al. (1999) enthaltene Information angepasst werden muss. Zuletzt werden die Eigenschaften der angepassten Übergangsmatrix sowie deren Implikationen für die zukünftige Entwicklung der Einkommensverteilung diskutiert.

## 5.2 EMPIRISCHE RESULTATE

Für die Bestimmung der benötigten Querschnittsverteilungen der Jahre 1979 und 1989 wurde der mittelwertadjustierte Datensatz von Burkhauser et al. (1999) benutzt (vergleiche Abschnitt 4.1). Diese Daten stammen aus dem Current Population Survey (CPS) und basieren auf dem Haushaltseinkommen in 1989 US-Dollars vor Steuern, jedoch nach Transfers. Die geschätzten Dichten der Einkommensverteilungen von 1979 und 1989 sind in Abbildung 5-1 dargestellt.



**Abbildung 5-1:** Dichteschätzungen der US-Einkommensverteilung

Sie wurden unter Benützung des durch Burkhauser et al. (1999) adaptierten Kern-dichteschätzers geschätzt.<sup>83</sup> Die Dichten zeigen den relativ starken Abbau der mittleren bis oberen Mittelklasse sowie die damit einhergehende Zunahme in den obersten und unteren bis mittleren Einkommensklassen klar auf.

Da der Ansatz auf einem endlichen Zustandsraum basiert, wurde die reelle Zahlen-gerade in  $K$  Intervalle unterteilt.  $K$  wurde willkürlich gleich 10 gesetzt, da davon ausgegangen werden kann, dass dies genügt, um die hauptsächlichen Charakteristika des Einkommensprozesses zu beschreiben. Ferner wurden die Grenzen dieser Intervalle so festgelegt, dass letztere, mit Ausnahme des ersten und zehnten Intervalls, alle dieselbe Länge bei logarithmischer Skala aufweisen. Dies deshalb, weil die AR(1)-Hypothese aus Abschnitt 6.2.3 logarithmierte Einkommen benötigt und weil die für die Generierung dieser Hypothese notwendigen logarithmierten Gitterpunkte, welche dann die Einkommensintervalle bestimmen, äquidistant gewählt werden.<sup>84</sup> Die resultierenden Partitions Grenzen wie auch die resultierenden Einkommensverteilungen der Jahre 1979 und 1989 sind in Tabelle 5-1 zusammengefasst.

Tabelle 5-1 zeigt natürlich dasselbe Phänomen wie Abbildung 5-1, nämlich die relativ starke Reduktion der Dimension der mittleren Einkommensklassen. In den Einkommensklassen 5 bis 8 befinden sich 1989 ungefähr 5% weniger Individuen als 1979. Diese Abnahme resultierte auf der einen Seite in einer Zunahme in den obersten zwei Einkommensklassen, jedoch auch in einen Anstieg in den Klassen 1 bis 4.

---

<sup>83</sup> Vergleiche Silverman (1986).

<sup>84</sup> Beim AR(1)-Modell wird von der empirisch gut gestützten Annahme ausgegangen, die logarithmierten Einkommen seien normalverteilt. Bei der Diskretisierung der logarithmierten Einkommensverteilung in  $K = 10$  Einkommensklassen sollten die daraus resultierenden Einkommenshistogramme die postulierte Normalverteilung der logarithmierten Einkommen näherungsweise widerspiegeln. Deshalb werden die für die AR(1)-Hypothese benötigten Gitterpunkte, welche dann zugleich die Einkommensgrenzen festlegen, äquidistant gewählt.

Da die Einkommensintervalle für alle Daten des empirischen Teils gleich bleiben, sollten sie alle benutzten Daten vernünftig widerspiegeln. Natürlich müssen die Einkommensgrenzen, neben den durch das AR(1)-Modell auferlegten Einschränkungen, auch den Daten gerecht werden. Vergleiche hierzu Abschnitt 9.3.2 im Anhang.

Einkommensklassen	Gitterpunkte des AR(1)-Prozesses	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (in %)	
		$m_{1979}$	$m_{1989}$
$(-\infty, 5'790 ]$	5'000	8.23	10.14
$( 5'790, 7'762 ]$	6'704	4.81	5.64
$( 7'762, 10'407 ]$	8'988	7.13	7.82
$( 10'407, 13'954 ]$	12'051	10.27	10.50
$( 13'954, 18'708 ]$	16'157	14.73	14.19
$( 18'708, 25'083 ]$	21'662	18.23	16.63
$( 25'083, 33'630 ]$	29'044	16.89	14.97
$( 33'630, 45'090 ]$	38'941	11.71	10.67
$( 45'090, 60'454 ]$	52'210	5.46	5.82
$( 60'454, \infty )$	70'000	2.54	3.62

**Tabelle 5-1:** Einkommensklassen mit zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Der Zweck dieser Analyse ist es, diese Entwicklung durch die Schätzung einer adäquaten Übergangsmatrix zu erklären. Der kritische Punkt dabei ist die Spezifikation einer vertretbaren Hypothese. In diesem Kapitel wird eine empirisch basierte Hypothese  $P_{\text{mod}}$  implementiert. Dies hat den Vorteil, dass die Hypothese nicht a priori angreifbar ist, da sie aus realen Daten generiert wird.

### 5.2.1 PSID-Hypothese

Im vorliegenden Beispiel wird die Frage behandelt, wie sich die Qualität von mittels Paneldaten geschätzten Einkommensdynamiken durch den Einbezug von Querschnittsdaten verbessern lässt. Da Querschnittsdaten im allgemeinen mehr Individuen und somit mehr Information über die Einkommensverteilung enthalten, führt ihr Einbezug auch zu einer Verbesserung von mittels Paneldaten geschätzten Übergangsmatrizen. Diese Fragestellung führt zur naheliegendsten Anwendungsart der Methode der Minimierung der relativen Entropie. Hierzu wird die aus dem PSID-Panel geschätzte Übergangsmatrix als Ausgangspunkt verwendet und dann die, im Lichte der vollständigeren Information in den durch Burkhauser et al. (1999) verwendeten Querschnitten, wahrscheinlichste Übergangsdynamik gesucht.

Zu diesem Zweck wurden diejenigen Personen aus dem PSID-Datensatz ausgewählt, welche in den beiden Jahren 1979 und 1989 ein positives Einkommen erzielten. Wie bei den Daten von Burkhauser et al. wurde das Einkommen nach Transfers,

jedoch vor Steuern berechnet. Dies resultierte in einer Stichprobe von 6'775 Individuen aus 53'013 (vergleiche Abschnitt 4.2). Diese Art der Datenerosion ist typisch für Panels über einen langen Zeithorizont und demonstriert die Nützlichkeit der Kombination von Paneldaten mit Querschnittsinformation. Zusätzlich wurden die PSID-Daten auf den 1989'er Mittelwert der von Burkhauser et al. verwendeten Daten adjustiert. Basierend auf den so erhaltenen Einkommen wurde eine Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}} = P_{\text{PSID}}$  geschätzt, welche auf den Einkommensklassen in Tabelle 5-1 beruht.<sup>85</sup> Die mittels PSID-Daten geschätzte Übergangsmatrix liefert eine vernünftige Spezifikation. Im Gegensatz zu den in Kapitel 6 vorgestellten theoriebasierten Modellen kann die PSID-Hypothese nicht a priori in Frage gestellt werden, da sie auf wirklichen Daten basiert. Für die Erstellung der hypothetischen zweidimensionalen Dichte wird, gemäss dem Vorschlag aus Abschnitt 2.4,  $\mu$  gleich der beobachteten Anfangsverteilung  $m_{1979}$  gesetzt. Die hypothetische zweidimensionale Dichte  $D_{\text{mod}}^* = D_{\text{PSID}}$  ist dann gegeben durch:

$$D_{\text{PSID}} = \text{diag}(m_{1979}) \cdot P_{\text{PSID}} \cdot$$

Mittels der Methode der Minimierung der relativen Entropie wird diese Hypothese optimal an die beobachteten Querschnittsverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  angepasst. In Tabelle 5-2 wird sowohl die optimal adjustierte Übergangsdynamik  $P_{\text{opt}}$  (fettgedruckt) wie auch die Hypothese  $P_{\text{PSID}}$  (Werte in Klammern) wiedergegeben.

Die Schrödingermultiplikatoren in Abbildung 5-2 sowie die angepasste Matrix in Tabelle 5-2 (fettgedruckt) zeigen auf, dass die Wahrscheinlichkeiten des Verbleibs in der tiefsten Einkommensklasse sowie des Abstiegs dorthin beträchtlich vermindert werden müssen. Zudem müssen die Chancen eines Aufstiegs aus unteren Klassen erhöht werden.

---

<sup>85</sup> Da die Methode die besten Resultate erzielt wenn die Hypothese keine Nullen enthält, wurde ein zweidimensionaler Kerndichteschätzer mit Normalverteilungskern und automatischer Wahl der Fensterbreite benutzt, um das PSID-Modell zu bestimmen (Programm `kdest2d.m` aus der Matlab-Toolbox von C.C. Beardah, <http://science.ntu.ac.uk/msor/ccb/densest.html>).

<b>0.2853</b> (0.3814)	<b>0.1015</b> (0.1020)	<b>0.1070</b> (0.1011)	<b>0.1231</b> (0.1142)	<b>0.1284</b> (0.0999)	<b>0.1087</b> (0.0805)	<b>0.0797</b> (0.0668)	<b>0.0410</b> (0.0335)	<b>0.0175</b> (0.0136)	<b>0.0078</b> (0.0071)
<b>0.2923</b> (0.3860)	<b>0.1417</b> (0.1406)	<b>0.1238</b> (0.1156)	<b>0.1055</b> (0.0967)	<b>0.1141</b> (0.0877)	<b>0.1005</b> (0.0735)	<b>0.0660</b> (0.0547)	<b>0.0360</b> (0.0290)	<b>0.0141</b> (0.0108)	<b>0.0059</b> (0.0053)
<b>0.2040</b> (0.2821)	<b>0.1264</b> (0.1313)	<b>0.1402</b> (0.1371)	<b>0.1389</b> (0.1333)	<b>0.1508</b> (0.1213)	<b>0.1154</b> (0.0884)	<b>0.0665</b> (0.0577)	<b>0.0361</b> (0.0305)	<b>0.0152</b> (0.0122)	<b>0.0066</b> (0.0062)
<b>0.1501</b> (0.2151)	<b>0.0925</b> (0.0997)	<b>0.1348</b> (0.1366)	<b>0.1675</b> (0.1666)	<b>0.1767</b> (0.1473)	<b>0.1335</b> (0.1060)	<b>0.0794</b> (0.0713)	<b>0.0408</b> (0.0357)	<b>0.0167</b> (0.0139)	<b>0.0079</b> (0.0077)
<b>0.0991</b> (0.1484)	<b>0.0649</b> (0.0731)	<b>0.1053</b> (0.1116)	<b>0.1506</b> (0.1566)	<b>0.1844</b> (0.1608)	<b>0.1802</b> (0.1495)	<b>0.1196</b> (0.1124)	<b>0.0603</b> (0.0552)	<b>0.0253</b> (0.0220)	<b>0.0103</b> (0.0104)
<b>0.0604</b> (0.0942)	<b>0.0396</b> (0.0465)	<b>0.0675</b> (0.0745)	<b>0.1080</b> (0.1171)	<b>0.1701</b> (0.1545)	<b>0.2250</b> (0.1946)	<b>0.1816</b> (0.1778)	<b>0.0945</b> (0.0901)	<b>0.0384</b> (0.0348)	<b>0.0150</b> (0.0158)
<b>0.0342</b> (0.0547)	<b>0.0231</b> (0.0278)	<b>0.0426</b> (0.0482)	<b>0.0728</b> (0.0807)	<b>0.1332</b> (0.1239)	<b>0.2116</b> (0.1874)	<b>0.2257</b> (0.2264)	<b>0.1551</b> (0.1515)	<b>0.0697</b> (0.0647)	<b>0.0319</b> (0.0345)
<b>0.0158</b> (0.0255)	<b>0.0131</b> (0.0159)	<b>0.0281</b> (0.0321)	<b>0.0514</b> (0.0577)	<b>0.0960</b> (0.0903)	<b>0.1575</b> (0.1412)	<b>0.2172</b> (0.2203)	<b>0.2185</b> (0.2160)	<b>0.1318</b> (0.1237)	<b>0.0707</b> (0.0772)
<b>0.0089</b> (0.0145)	<b>0.0076</b> (0.0093)	<b>0.0184</b> (0.0211)	<b>0.0352</b> (0.0395)	<b>0.0695</b> (0.0655)	<b>0.1214</b> (0.1089)	<b>0.1784</b> (0.1813)	<b>0.2292</b> (0.2269)	<b>0.1937</b> (0.1822)	<b>0.1377</b> (0.1507)
<b>0.0063</b> (0.0101)	<b>0.0050</b> (0.0060)	<b>0.0096</b> (0.0108)	<b>0.0211</b> (0.0233)	<b>0.0498</b> (0.0461)	<b>0.0861</b> (0.0759)	<b>0.1217</b> (0.1214)	<b>0.1746</b> (0.1697)	<b>0.1888</b> (0.1744)	<b>0.3370</b> (0.3623)

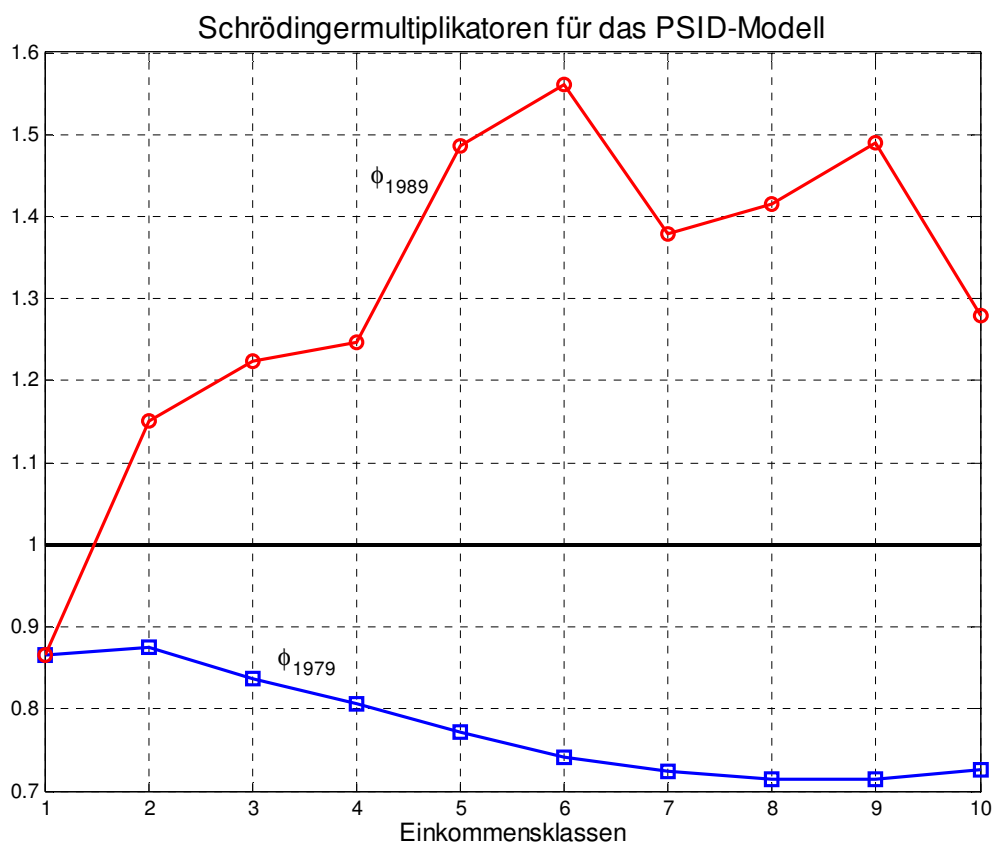


Anpassungsfaktoren über 1.25



Anpassungsfaktoren unter 0.8

**Tabelle 5-2:** Angepasste Übergangsmatrix  $P_{opt}$  (fettgedruckt) und Hypothese  $P_{PSID}$  (in Klammern) für das PSID Modell



**Abbildung 5-2:** Schrödingermultiplikatoren der PSID-Hypothese

Die Mobilitätsdiskussion wird in den Kapiteln 5 bis 7 anhand des Indexpaars geführt, welches durch das Bartholomew-Funktional bestimmt wird (vergleiche Kapitel 3). Sowohl für die ursprüngliche als auch für die optimal angepasste Hypothese werden der Bartholomew-Gleichgewichtsindex sowie der korrespondierende Periodenindex berechnet, letzterer bei 50 % der maximal möglichen Abweichung oberhalb des Gleichgewichtsindex. Während Bartholomew's Index den Aspekt der Mobilität im Gleichgewichtszustand misst, beschreibt der Periodenmobilitätsindex die Mobilität, welche mit der Konvergenz der empirischen Mobilität zum ergodischen Zustand assoziiert ist. Zusätzlich wird, als Beispiel eines konventionellen Konvergenzindex, für alle betrachteten Fälle der Prais' Mobilitätsindex bestimmt. In Tabelle 5-3 sind alle Indexmasse für die hier betrachtete PSID-Hypothese dargestellt.

Aus Tabelle 5-3 lässt sich entnehmen, dass der Anpassungsprozess zu einer Reduktion sowohl der Gleichgewichts- als auch der Periodenmobilität führt, welche durch Bartholomew's Index respektive den Periodenmobilitätsindex repräsentiert werden. Dies bedeutet, dass die angepasste Dynamik, verglichen mit der ursprünglichen Hypothese, im ergodischen Zustand wie auch während des Prozesses der Konvergenz zum Gleichgewichtsindex eine tiefere Mobilität aufweist. Die Anpassung der PSID-Hypothese an die CPS-Einkommensquerschnitte führt somit zu einer Reduktion der Abschätzung beider Mobilitätsaspekte.

Zudem zeigt Tabelle 5-3, dass der Anpassungsschritt zu einer leichten Erhöhung des Prais' Index führt. Dieser Index zieht jedoch nur die Elemente der Hauptdiagonale in Betracht. Ein Blick auf die Hauptdiagonale in Tabelle 5-2 zeigt, dass die Erhöhung der Mobilität in der optimal angepassten Übergangsmatrix im Vergleich zur Hypothese  $P_{PSID}$  durch die Anpassungen nach unten in den Klassen 1, 7 und 10 zustande kam. Die Anpassungen nach oben in den Klassen 2 bis 6 sowie 8 und 9 zeigen auf, dass in diesen Klassen die Mobilität im Vergleich zur Hypothese abnahm. Die Zunahme der globalen Mobilität kommt deshalb zustande, weil der Zuwachs an Mobilität vor allem in der niedrigsten und der höchsten Klasse deutlich grösser ist als der Anstieg der Persistenz in den Einkommensklassen 2 bis 6 sowie 8 und 9.

	PSID-Modell
<b>Bartholomew's Mobilitätsindex<sup>a</sup></b>	
Hypothese	1.8821
angepasste Übergangsmatrix	1.8260
<b>Periodenmobilitätsindex<sup>a</sup></b>	
Hypothese	0.2606
angepasste Übergangsmatrix	0.2457
<b>Prais' Mobilitätsindex<sup>a</sup></b>	
Hypothese	0.8702
angepasste Übergangsmatrix	0.8756
<b>relative Entropie</b>	0.0130
<b>Teststatistik (<math>\chi^2(9)</math>)<sup>b</sup></b>	176.65

<sup>a</sup> Die Definitionen dieser Indices finden sich in Tabelle 3-1 und Definition 3-7 in Kapitel 3  
<sup>b</sup> Der Test ist auf dem 1%-Niveau signifikant

**Tabelle 5-3:** Zusammengefasste Masszahlen PSID-Hypothese

Es verbleibt nun noch die Auswertung der Teststatistik (2-17) um den Grad der notwendigen Anpassungen der PSID-Hypothese an die Querschnittsverteilungen zu bewerten. Die Querschnittsverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  werden als äquivalent zu den wahren Verteilungen der Grundgesamtheit betrachtet. Ein Blick auf die Stichprobengrößen in Tabelle 4-1 zeigt, dass diese Annahme nicht unrealistisch ist. Das Problem der Anpassung der aus den PSID-Daten geschätzten Übergangswahrscheinlichkeiten an die Querschnittsverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  kann dann als Problem der Abschätzung von Zellenwahrscheinlichkeiten einer Kontingenztafel behandelt werden, für welche die Randdichten bekannt und gegeben sind (Ireland und Kullback 1968; Aebi 1996; Aebi, Neusser und Steiner 1999). In diesem Falle entspricht die Anzahl  $n$  in der Teststatistik (2-17) den 6'775 Beobachtungen aus dem PSID-Datensatz. Mit dieser Interpretation wird der Wert der Teststatistik gleich 176.65. Auf dem 1%-Niveau beträgt der kritische Wert der  $\chi^2$ -Verteilung mit 9 Freiheitsgraden 21.67. Dies bedeutet, dass die notwendigen Anpassungen der PSID-Hypothese signifikant ausfallen. Somit wird die ursprüngliche Hypothese zur Erklärung der Einkommensdynamik der USA für die Dekade 1979 bis 1989 abgelehnt. Für die weiteren Analysen des Einkommensprozesses der USA würde auch im Falle einer Nichtablehnung der initialen Hypothese die angepasste Matrix verwendet, da

sich diese immer mindestens so nah bei der wahren Dynamik befindet wie die Hypothese (vergleiche Abbildung 2-3).

### 5.2.2 Prognosen

Als letztes Experiment wurde die adjustierte Übergangsmatrix dazu benutzt, die Verteilung  $m_{1989}$  zehn Jahre in die Zukunft zu projizieren. Die entsprechende Verteilung des Jahres 1999 sowie die implizierte Gleichgewichtsverteilung sind in Tabelle 5-4 enthalten.

Einkommens- klasse	Beobachtungen		projizierte Verteilungen angepasstes PSID Modell	
	$m_{1979}$	$m_{1989}$	$m_{1999}$	$\pi$
1	8.23	10.14	10.88	11.32
2	4.81	5.64	5.92	6.08
3	7.13	7.82	7.99	8.11
4	10.27	10.50	10.54	10.60
5	14.73	14.19	14.03	13.99
6	18.23	16.63	16.14	15.93
7	16.89	14.97	14.43	14.15
8	11.71	10.67	10.38	10.17
9	5.46	5.82	5.81	5.73
10	2.54	3.62	3.90	3.93
$A_{\epsilon=0.5}$	0.094	0.108	0.112	0.114
$GE_{\alpha=2}$	0.199	0.235	0.246	0.252

$m_{1999}$  projizierte Einkommensverteilung 1999 basierend auf der angepassten Übergangsmatrix und der Anfangsverteilung  $m_{1989}$

$\pi$  Gleichgewichtsverteilung der angepassten Übergangsmatrix

$A_{\epsilon=0.5}$  Atkinson's Ungleichheitsindex mit  $\epsilon = 0.5$

$GE_{\alpha=2}$  Verallgemeinerter Entropieindex mit  $\alpha = 2$

**Tabelle 5-4:** Projizierte und gleichgewichtige Verteilungen

Für jede Verteilung wurden sowohl Atkinson's Ungleichheitsmass  $A_{\epsilon}$  als auch der verallgemeinerte Entropieindex  $GE_{\alpha}$  berechnet.<sup>86</sup> Die starke Abnahme der oberen Mittelklassen um 5.1 Prozentpunkte während der 80'er Jahre geht einher mit einer

<sup>86</sup> Die beiden Ungleichheitsmasse sind im Anhang in Abschnitt 9.3.3 definiert.



Zunahme in den zwei obersten (1.45 Prozentpunkte) sowie in den untersten vier Einkommensklassen (3.65 Prozentpunkte). Diese Entwicklung führte zu einer starken Zunahme beider Ungleichheitsmasse. Die adjustierte PSID-Hypothese sagt nun über die nächsten 10 Jahre einen weiteren, jedoch etwas abgeschwächten Anstieg der Ungleichheit in den USA voraus. Man beachte hierbei die Zunahme in der obersten (0.28 Prozentpunkte) wie auch den vier untersten Einkommensklassen (1.23 Prozentpunkte). Langfristig wird sogar noch eine weitere Zunahme der Ungleichheit prognostiziert, die mittleren bis oberen Einkommensklassen 5 bis 9 erleiden weiterhin eine Reduktion zugunsten der restlichen Klassen. Die Ungleichheitszunahme schwächt sich jedoch weiter ab. Während die oberste Klasse nur noch unwesentlich zulegen kann (0.03 Prozentpunkte) ist die Zunahme in den untersten vier Einkommensklassen immer noch beachtlich (zusätzliche 0.78 Prozentpunkte). Ohne Änderungen in der Politik der USA prognostiziert das PSID-Modell eine Fortsetzung des Trends zu einer stärker segregierten Gesellschaft.

### **5.3 SCHLUSSBETRACHTUNGEN UND AUSBLICK**

In diesem Abschnitt wurde die Methode der Minimierung der relativen Entropie dazu verwendet, eine aus dem PSID-Panel geschätzte Übergangsmatrix an die wesentlich umfangreicheren Querschnittsverteilungen aus dem von Burkhauser et al. (1999) verwendeten Datensatz anzupassen. Diese Anpassung entspricht einer Verbesserung der Qualität der geschätzten Übergangsdynamik, da die verwendeten Querschnittsdaten wesentlich mehr Individuen umfassen als das für die Hypothese verwendete PSID-Panel. Durch den Anpassungsschritt wird die in den Querschnitten enthaltene Information in die Schätzung der Einkommensdynamik eingebracht. Die so geschätzte Übergangsmatrix wurde dann verwendet, die Entwicklung der Einkommensverteilung der USA zu erklären, im speziellen die Bewegungen der Mittelklasse. Alleine aus der Betrachtung der Einkommensverteilungen in den Jahren 1979 und 1989 geht hervor, dass der Hauptteil des Rückgangs bei den mittleren Einkommen mit einer Zunahme bei den unteren Einkommensklassen erklärt werden kann. Durch diese Entwicklung stieg die Ungleichheit in den USA stark an und die hier erarbeiteten Prognosen lassen, bei gleichbleibender Politik, sowohl kurz- wie lang-

fristig eine Fortsetzung dieses Trends erwarten, wenngleich in etwas abgeschwächter Form. Die hier angestellten Betrachtungen sind jedoch relativer Natur da die 1979'er Daten auf den Mittelwert der 1989'er Daten korrigiert wurden. Deshalb widersprechen die erhaltenen Resultate nicht der Möglichkeit, dass ökonomisches Wachstum unter dem Strich allen zugute kommen könnte. Die Tendenz zu anhaltender Segregation der US-Gesellschaft ist jedoch klar ersichtlich.

Die Methode ermöglicht es, Hypothesen über die Einkommensdynamik zu testen und optimal anzupassen. Der Test zeigt auf, ob die notwendigen Anpassungen der Hypothese an die Querschnittsverteilungen signifikant ausfallen oder nicht. Da jedoch die optimal angepasste Dynamik bei jedem Testresultat im Sinne der relativen Entropie mindestens gleich nah an der unbeobachtbaren wahren Dynamik liegt wie die Hypothese, wird für die Berechnung von Massen zur Beschreibung der Einkommensdynamik immer von der optimal adjustierten Hypothese ausgegangen. Bei der hier durchgeführten Adjustierung der PSID-Hypothese an die Einkommensquerschnitte des Burkhauser-Datensatzes erweisen sich die notwendigen Anpassungen allerdings als hoch signifikant. Die hier vorgestellte Kombination von Querschnittsbeobachtungen mit longitudinalen Daten erweist sich als naheliegende und vielversprechende Forschungsstrategie. Sie erlaubt es, Vorteile aus den in Querschnitten typischerweise grossen Stichprobenumfängen zu ziehen, ohne auf die Informationen zur Einkommensdynamik aus Paneldaten zu verzichten. Die präsentierte Methode erscheint in diesem Licht als wertvolle Technik um die Qualität der Schätzung der Einkommensdynamik aus Paneldaten zu verbessern.

Zudem könnten Abschätzungen der Einkommensdynamik auch dann mittels der Methode der Minimierung der relativen Entropie verbessert werden, wenn in einer Untersuchung nur auf Paneldaten zurückgegriffen werden soll. Hier würde zuerst aus allen Individuen mit gültiger Einkommensangabe sowohl im Anfangs- als auch im Endjahr der Betrachtung auf konventionelle Weise die hypothetische Übergangsmatrix geschätzt. Die beobachteten Randverteilungen würden dann für die beiden Jahre aus allen Individuen geschätzt, welche im jeweiligen Jahr eine gültige Einkommensangabe machten (hier wären dann auch diejenigen Individuen enthalten, welche nur in jeweils einem Jahr eine Einkommensangabe vorweisen). Die so erhaltenen Querschnitte könnten dann noch, wenn vorhanden, mit den entsprechenden Gewichten

an die Gesamtpopulation angepasst werden. Die an die so geschätzten Randverteilungen angepasste Hypothese entspräche dann der unter diesen Umständen bestmöglichen Abschätzung der Übergangsdynamik.

Im folgenden Kapitel wird der folgerichtige nächste Schritt bei der Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie vorgestellt. So verlangt eine konsequente Weiterführung dieser Vorgangsweise geradezu danach, Informationen über den Einkommensprozess zu generieren, wenn nur Querschnittsdaten und keine Paneldaten verfügbar sind. Wie aus dem vorangegangenen Vorgehen klar geworden sein dürfte, benötigt die Methode neben den beobachteten Einkommensquerschnitten zu zwei Zeitpunkten auch eine Hypothese über die Dynamik des Einkommensprozesses. Bei fehlender Information aus Paneldaten müssen dafür theoretische Überlegungen herangezogen werden. So generierte Hypothesen sind, im Gegensatz zu den empirisch generierten, immer a priori anfechtbar. Allerdings sei hier festgehalten, dass die Hypothesen immer nur als Ausgangspunkt für den Anpassungsprozess benutzt werden. Die mittels einfacher theoriebasierter Modelle erhaltenen Einsichten über den Einkommensprozess in den USA werden im nächsten Kapitel mit den empirisch generierten Resultaten aus diesem Kapitel verglichen.



## 6 ANPASSUNG VON THEORIEN DER EINKOMMENS-DYNAMIK AN QUERSCHNITTS-DATEN<sup>87</sup>

### 6.1 EINLEITUNG

Die in diesem Abschnitt behandelte Problematik ist die konsequente Fortsetzung des vorangegangenen Kapitels. Im Gegensatz zu Abschnitt 5 geht es nun nicht mehr darum, eine konventionell geschätzte Übergangsdynamik durch Einbezug von Einkommensquerschnitten zu verbessern, hier sollen Übergangsdynamiken bei vollständiger Abwesenheit von Paneldaten geschätzt werden. Wie aus den vorhergehenden Kapiteln deutlich geworden ist, werden zur Anwendung der Methode beobachtete Querschnittsverteilungen sowie eine Hypothese über die Einkommensdynamik benötigt. In Kapitel 5 stammte diese Hypothese aus einer gewöhnlichen Schätzung aus dem PSID-Panel. Fehlen Paneldaten für die zu untersuchende Einheit oder sind diese aus anderen Gründen nicht zugänglich, muss die Modelldynamik auf andere Art erstellt werden. Die Hypothese kann entweder aus theoretischen Überlegungen heraus generiert werden oder auf empirische Weise durch Schätzung einer Übergangsdynamik aus Paneldaten eines vergleichbaren Landes.

In diesem Abschnitt werden drei mehr oder weniger plausible theoriebasierte Hypothesen der Einkommensdynamik an die in den Querschnittsdaten von Burkhauser et al. (1999) vorhandene Information angepasst. Diese Art des Vorgehens erlaubt es Forschern sogar dann zu Einsichten über die Einkommensdynamik zu gelangen, wenn Informationen aus Paneldaten fehlen.

Im Gegensatz zu Kapitel 5 entstammen hier die Hypothesen keiner Stichprobe. Deshalb lässt sich ein statistischer Test gemäss Gleichung (2-16) respektive (2-17) zur Bewertung der Hypothese nicht zur Anwendung bringen. Wie im vorangegangenen Kapitel hat die angepasste Dynamik jedoch auch bei der hier vorgestellten Variante der Methode die Interpretation einer Projektion. Aus Sicht der ursprünglichen Hypothese befindet sich folglich auch hier die angepasste Einkommensdynamik im Sinne

---

<sup>87</sup> Dieses Kapitel bezieht sich auf die Arbeit "Improving Models of Income Dynamics using Cross-Section Information" von Aebi, Neusser und Steiner (2002 a).

der relativen Entropie immer "näher" an der wahren, jedoch unbeobachtbaren Dynamik. Unabhängig davon, wie nah die ursprüngliche Hypothese an die Menge, in welcher sich die "wahre" Dynamik befindet, zu liegen kommt, wird deshalb auch hier die angepasste Hypothese für die Berechnung von Massen zur Beschreibung wichtiger Aspekte der zeitlichen Entwicklung der Einkommensdynamik verwendet.

In Abschnitt 6.2 werden drei mehr oder weniger plausible theoriebasierte, an die Datenparameter angepasste Hypothesen vorgestellt, die dann an die Einkommensquerschnitte angepasst werden, welche aus dem von Burkhauser et al. (1999) verwendeten Datensatz stammen. Ausgehend von den drei Hypothesen werden Übergangsmatrizen geschätzt, welche die Einkommensverteilungen der USA der Jahre 1979 und 1989 abbilden. Zum Schluss werden die Eigenschaften der angepassten Übergangsmatrizen sowie deren Implikationen für die zukünftige Entwicklung der Einkommensverteilung diskutiert. Zudem werden die Resultate dieser theoriebasierten Modelle den Erkenntnissen gegenübergestellt, welche in Kapitel 5 mit der empirisch hergeleiteten PSID-Hypothese der Übergangsdynamik erhalten wurden.

## 6.2 EMPIRISCHE RESULTATE

Wie in Kapitel 5 wurde hier derselbe Datensatz wie bei Burkhauser et al. (1999) benutzt, um die Querschnittsverteilungen der Grundgesamtheit abzuschätzen. Die Daten wurden dem Current Population Survey (CPS) entnommen und basieren auf dem Haushaltseinkommen in 1989 US-Dollars vor Steuern, jedoch nach Transfers. Sie wurden der selben Prozedur wie im vorangegangenen Kapitel unterzogen. Im Klartext bedeutet dies Korrektur um das allgemeine ökonomische Wachstum durch Anpassung der 1979'er Daten auf den Mittelwert der 1989'er Daten sowie Umwandlung in individuelle Einkommen unter Verwendung einer Äquivalenzskala mit Elastizität 0.5 (Quadratwurzel-Skala). Zudem wurde die Stichprobe der Grundgesamtheit durch Berücksichtigung des mit jeder Beobachtung assoziierten Gewichts angepasst. Die mittels des durch Burkhauser et al. (1999) adaptierten Kerndichteschätzers berechneten Dichten sind in Abbildung 5-1 abgebildet. Dort wird der relativ starke Abbau der Klassen im mittleren bis oberen Einkommenssegment, welcher mit einer

entsprechenden Zunahme in den obersten und unteren bis mittleren Einkommensklassen einhergeht, klar aufgezeigt.

Wie beim Beispiel der PSID-Hypothese aus Kapitel 5 wurde die reelle Zahlengerade in die gleichen  $K = 10$  Intervalle unterteilt, welche, mit Ausnahme des ersten und des letzten Intervalls, alle dieselbe Länge bei logarithmischer Skala aufweisen. Die resultierenden Partitions Grenzen wie auch die resultierenden Einkommensverteilungen der Jahre 1979 und 1989 wurden in Tabelle 5-1 zusammengefasst.<sup>88</sup>

Der Übersichtlichkeit halber soll hier nochmals erwähnt werden, dass aus Abbildung 5-1 und Tabelle 5-1 eine relativ starke Reduktion um 5.1 Prozentpunkte in den Einkommensklassen 5 bis 8 hervorgeht. Diese ungefähr 5% Mittelklasseeinkommen von 1979 finden sich 1989 zum grössten Teil in den Klassen 1 bis 4 wieder (3.65 Prozentpunkte). Auch die zwei obersten Klassen zeigten einen entsprechenden Zuwachs. Durch eine Schätzung der zugrundeliegenden Übergangsdynamik soll nun versucht werden, diese Entwicklung zu durchleuchten und die weitere Entwicklung abzuschätzen.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich ohne Zugang zu Paneldaten eine vernünftige Hypothese  $D_{\text{mod}}$  respektive  $P_{\text{mod}}$  spezifizieren lässt. Im Gegensatz zur empirisch motivierten PSID-Hypothese aus dem vorherigen Kapitel sind aus theoretischen Überlegungen abgeleitete Hypothesen natürlich immer mit dem Makel einer gewissen Willkür behaftet und somit a priori kritisierbar. Um verschiedene Ansichten über die Einkommensdynamik in die Untersuchung einfließen zu lassen, werden drei einfache, theoretisch begründete Hypothesen  $P_{\text{mod}}$  implementiert. In allen Spezifikationen wird zur Bestimmung der hypothetischen zweidimensionalen Dichte in  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu) \cdot P_{\text{mod}}$  für  $\mu$  gerade die beobachtete Anfangsverteilung  $m_{1979}$  aus dem Datensatz von Burkhauser et. al. (1999) gesetzt (vergleiche hierzu Kapitel 4 und Tabelle 5-1). Da die Bewegungen der Mittelklasse von 1979 nach 1989 untersucht werden sollen und wegen der Begründungen in Abschnitt 2.4 ist diese Wahl sinnvoll.

Jede Spezifikation wird zusammen mit der entsprechend angepassten Matrix in einer separaten Tabelle dargestellt. Zudem werden die Schrödingermultiplikatoren  $\phi_{t,i}$  und

---

<sup>88</sup> Zur Herleitung der Einkommensgrenzen sei hier auf Abschnitt 9.3.2 im Anhang verwiesen.

$\phi_{t+1,j}$  zu jeder Spezifikation in gesonderten Abbildungen dargestellt. Obschon die zu den Anfangsrestriktionen gehörenden Schrödingermultiplikatoren zur Berechnung der optimal angepassten Übergangsmatrix nicht benötigt werden (vergleiche Gleichung (2-13)), sind sie dort aus Gründen der Vollständigkeit aufgeführt.

### 6.2.1 Hypothese maximaler Mobilität

Bei der ersten Spezifikation ist die Ausgangshypothese eine perfekt mobile Übergangsmatrix. Darunter werden Übergangsmatrizen verstanden, bei denen die Wahrscheinlichkeit, in einer bestimmten Einkommensklasse zu enden, unabhängig davon ist, aus welcher Klasse gestartet wurde (Prais 1955). Solche Übergangsmatrizen haben lauter identische Zeilen, sodass ihr Prais' Mobilitätsindex gleich 1, das heisst maximal wird. Solche Matrizen werden deshalb oft auch als maximal mobil bezeichnet. Die Gleichgewichtsverteilung solcher Matrizen entspricht der Verteilung, welche in ihren identischen Zeilen steht. Solche Dynamiken führen jede arbiträre Anfangsverteilung  $\mu$  direkt in ihre Gleichgewichtsverteilung über. Für perfekt mobile Matrizen  $P_{\text{mod}}$  gilt, mit  $\pi_{P_{\text{mod}}}$  als zugehöriger Gleichgewichtsverteilung, der folgende Zusammenhang:

$$p_{\text{mod},ij} = p_{\text{mod},kj} = \pi_{P_{\text{mod}},j} \quad \forall i, k, j \in \{1, \dots, K\} .$$

Es kann gezeigt werden, dass die Methode der Minimierung der relativen Entropie jede perfekt mobile Übergangsdynamik  $P_{\text{mod}}$  so anpasst, dass daraus eine perfekt mobile Matrix mit der Endverteilung  $m_{t+1}$  in den Zeilen wird. Wird  $\mu$ , die willkürliche Anfangsverteilung der perfekt mobilen Hypothese  $P_{\text{mod}}$ , gleich der beobachteten Anfangsverteilung  $m_t$  gesetzt und werden die bis auf eine multiplikative Konstante bestimmten Schrödingermultiplikatoren dadurch festgelegt, dass  $\phi_{t,1} = \phi_{t+1,1}$  gesetzt wird, dann sind die Schrödingermultiplikatoren gegeben durch:<sup>89</sup>

---

<sup>89</sup> Die Herleitungen der optimal adjustierten Dynamik  $P_{\text{opt}}$  bei gegebener perfekt mobiler Hypothese  $P_{\text{mod}}$  sowie der zugehörigen Schrödingermultiplikatoren werden in Abschnitt 9.3.4 im Anhang durchgeführt.




$$\phi_{t,j} = \sqrt{\frac{m_{t+1,1}}{\pi_{P_{\text{mod}},1}}} \quad \forall i ; \quad \phi_{t+1,j} = \sqrt{\frac{\pi_{P_{\text{mod}},1}}{m_{t+1,1}}} \cdot \frac{m_{t+1,j}}{\pi_{P_{\text{mod}},j}} \quad \forall j .$$


Daraus folgt, dass die optimal adjustierten Dynamiken für alle maximal mobilen Hypothesen  $P_{\text{mod}}$  identisch sind. Deshalb kann als Hypothese sehr wohl die Matrix genommen werden, welche in ihren Zeilen die Anfangsverteilung  $m_{1979}$  hat. Somit hat  $P_{\text{mod}} = P_{\text{max}}$  als Gleichgewichtsverteilung  $m_{1979}$ . Wie erwähnt wird zur Erstellung der hypothetischen zweidimensionalen Dichte  $D_{\text{mod}}^* = D_{\text{max}}$  für  $\mu$  die beobachtete Anfangsverteilung  $m_{1979}$  eingesetzt:

$$D_{\text{max}} = \text{diag}(m_{1979}) \cdot P_{\text{max}} .$$

Die für alle maximal mobilen Hypothesen identische optimal adjustierte Matrix  $P_{\text{opt}}$  enthält in ihren Zeilen die Endverteilung  $m_{1989}$ , welche auch gerade die Gleichgewichtsverteilung dieser Matrix ist. Tabelle 6-1 enthält die angepasste Übergangsmatrix (fettgedruckt) sowie die Hypothese (in Klammern).

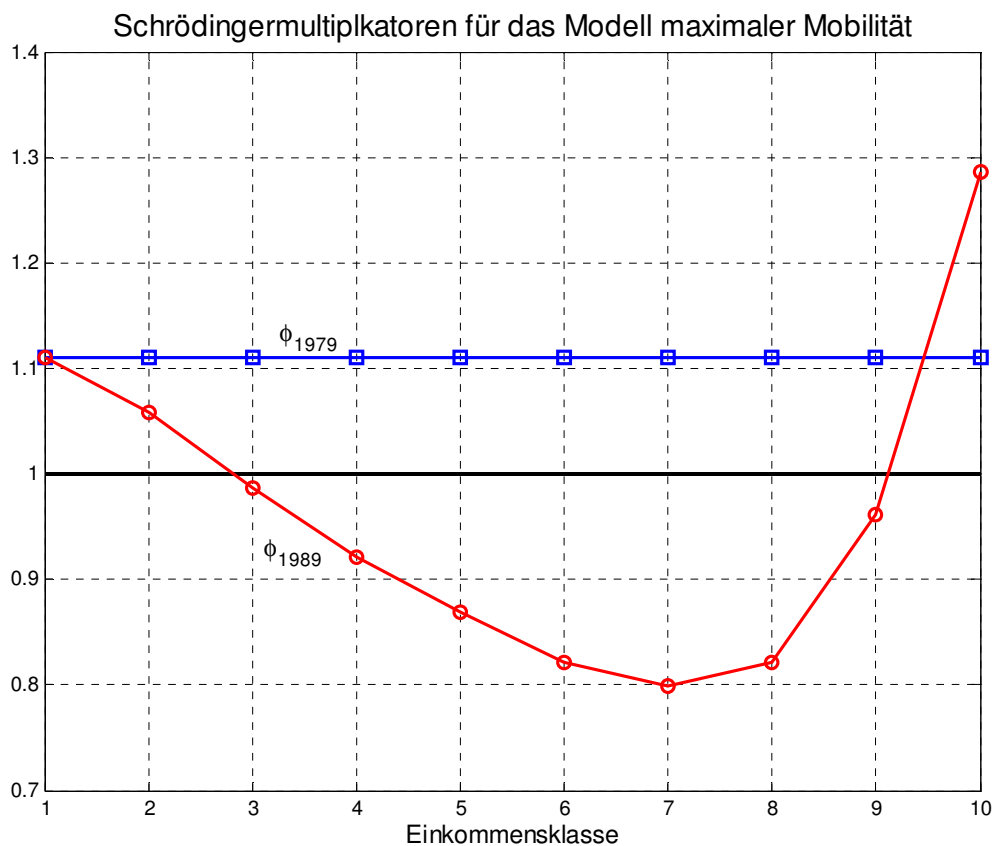
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)
<b>0.1014</b> (0.0823)	<b>0.0564</b> (0.0481)	<b>0.0782</b> (0.0713)	<b>0.1050</b> (0.1027)	<b>0.1419</b> (0.1473)	<b>0.1663</b> (0.1823)	<b>0.1497</b> (0.1689)	<b>0.1067</b> (0.1171)	<b>0.0582</b> (0.0546)	<b>0.0362</b> (0.0254)

 Anpassungsfaktoren über 1.25

 Anpassungsfaktoren unter 0.8

**Tabelle 6-1:** Angepasste Übergangsmatrix  $P_{\text{opt}}$  (fettgedruckt) und Hypothese  $P_{\text{max}}$  (in Klammern) für das Modell maximaler Mobilität

Die Schrödingermultiplikatoren in Abbildung 6-1 verdeutlichen, wie schon früher angemerkt wurde, dass in mittleren Einkommensklassen ein Abbau und vor allem in unteren Klassen eine Zunahme stattgefunden hat. Die Wahrscheinlichkeiten, in die Klassen 5 bis 8 zu gelangen, werden durch den Anpassungsprozess reduziert, während diejenigen, in die obersten sowie in die unteren Klassen zu gelangen, erhöht werden müssen.



**Abbildung 6-1:** Schrödingermultiplikatoren der Hypothese maximaler Mobilität

In Tabelle 6-2 sind die Mobilitätsmasse aller ursprünglichen Hypothesen sowie der zugehörigen angepassten Übergangsdynamiken dieses Kapitels dargestellt. Ebenfalls aufgeführt sind die jeweiligen relativen Entropien zwischen hypothetischer und adjustierter zweidimensionaler Dichtematrix. Aus den Eingangs dieses Kapitels erwähnten Gründen wird hier jedoch keine  $\chi^2$ -Teststatistik gemäss Gleichung (2-17) über die Hypothesen aufgeführt.

	<b>maximale Mobilität</b>	<b>3-Band-Modell</b>	<b>AR(1)-Modell</b>
<b>Bartholomew's Mobilitätsindex</b> <sup>a</sup>			
Hypothese	2.5957	1.5961	1.3835
angepasste Übergangsmatrix	2.7750	1.5450	1.3317
<b>Periodenmobilitätsindex (<math>\gamma = 0.5</math>)</b> <sup>a</sup>			
Hypothese	0.4904	0.0814	0.0363
angepasste Übergangsmatrix	0.5246	0.0876	0.0380
<b>Prais' Mobilitätsindex</b> <sup>a</sup>			
Hypothese	1	0.8694	0.8369
angepasste Übergangsmatrix	1	0.8546	0.8313
<b>relative Entropie</b>	0.0077	0.0110	0.0203

<sup>a</sup> Die Definitionen dieser Indices finden sich in Tabelle 3-1 und Definition 3-7 in Kapitel 3

**Tabelle 6-2:** Zusammengefasste Masszahlen der drei Hypothesen

Um die Bedeutung der relativen Entropie nochmals zu verdeutlichen, wird hier ein vorgezogener Vergleich der relativen Entropien aller Modelle dieses Kapitels wie auch derjenigen der PSID-Hypothese (vergleiche Tabelle 5-3) angestellt. Es stellt sich heraus, dass die relative Entropie für das Modell der maximalen Mobilität mit Abstand am geringsten ausfällt. Dies ist jedoch, für sich alleine genommen, kein verbindlicher Hinweis auf die Qualität einer Hypothese. Ein Blick auf Abbildung 2-3 zeigt, dass dieser Befund nur besagt, dass die Hypothese maximaler Mobilität im Sinne der relativen Entropie am nächsten an die Lösungsmenge  $\bar{D}$  zu liegen kommt, in welcher auch die wahre Dynamik liegen muss. So kann es zum Beispiel sein, dass eine Hypothese sehr nahe bei dieser Lösungsmenge liegt, die zugehörige angepasste Dynamik jedoch trotzdem relativ weit von der "wahren" Dynamik entfernt ist. Auch der Fall ist denkbar, dass eine Hypothese einen grösseren Abstand zur Lösungsmenge hat, die entsprechend angepasste Dynamik jedoch mit der "wahren" Dynamik übereinstimmt. Somit kann das Fazit gezogen werden, dass die Wahl einer einleuchtenden, vertretbaren Hypothese ein wichtiger Pfeiler zur Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie ist. So wäre es im hier angestellten Vergleich ziemlich unsinnig, die Hypothese maximaler Mobilität aufgrund ihrer niedrigen relati-

ven Entropie als die beste Hypothese zu betrachten.<sup>90</sup> Die empirisch abgeleitete PSID-Hypothese und auch die nachfolgenden anspruchsvolleren theoriebasierten Hypothesen sind sicherlich die vernünftigeren Ausgangspunkte zur Analyse der Einkommensdynamik der USA in der beobachteten Periode. Zudem werden ja auch für die Analyse die optimal angepassten Übergangsdynamiken und nicht die Hypothesen selbst verwendet. Abbildung 2-3 verdeutlicht zudem, dass, auch wenn eine Hypothese näher bei der "wahren" Dynamik liegen sollte als eine andere, für die entsprechenden angepassten Modelle das Resultat durchaus umgekehrt ausfallen kann. Da dieser Test wegen der unbekanntenen wahren Dynamik jedoch nie gemacht werden kann, ist eine haltbare Hypothese immer die beste Voraussetzung für ein vernünftiges Resultat.

Da im Fall der Hypothese maximaler Mobilität sowohl das ursprüngliche Modell wie auch die optimale Anpassung an die beobachteten Querschnittsverteilungen Matrizen sind, welche jede Verteilung direkt in die ihnen entsprechende Gleichgewichtsverteilung überführen, sind beide schon a priori nicht für irgendwelche zukünftigen Prognosen verwendbar. Die angepasste Hypothese maximaler Mobilität ist somit kein idealer Ausgangspunkt, um irgendwelche Schlussfolgerungen über die Einkommensdynamik anzustellen.

### 6.2.2 3-Band-Hypothese

Die zweite theoriebasierte Hypothese ist eine interessantere, realitätsnähere Spezifikation. Hier wird davon ausgegangen, dass die Individuen höchstens eine Klasse pro Jahr auf- oder absteigen können. Dies bedeutet, dass die Jahresdynamik durch eine 3-Bandmatrix  $P_{3\text{Band}}$  repräsentiert wird. Zudem wird angenommen, dass  $m_{1979}$  die

---



<sup>90</sup> Dies würde auch für die  $\chi^2$ -Teststatistik (Gleichung (2-17)) gelten, falls für alle unterschiedlichen Hypothesen eine solche existieren würde. Die relative Entropie wie auch der darauf aufbauende statistische Test sind nicht dazu geeignet, unterschiedliche Hypothesen miteinander zu vergleichen. Der Test eignet sich bloss für die Bewertung der notwendigen Anpassungen an die beobachteten Querschnittsverteilungen einer Hypothese.

Invariante von  $P_{3\text{Band}}$  ist.<sup>91</sup> Zudem wird wiederum  $\mu$  gleich  $m_{1979}$  gesetzt. Die zweidimensionale Dichte  $D_{\text{mod}}^* = D_{3\text{Band}}$  über die gesamte Dekade 1979 bis 1989 ist dann gegeben durch:

$$D_{3\text{Band}} = \text{diag}(m_{1979}) \cdot P_{3\text{Band}}^{10}.$$

Diese zweite Hypothese wird als 3-Band-Hypothese bezeichnet. Die zugehörige Übergangsmatrix  $P_{3\text{Band}}^{10}$  wird in Tabelle 6-3 (in Klammern) dargestellt.

<b>0.5700</b> (0.5102)	<b>0.2133</b> (0.2126)	<b>0.1103</b> (0.1291)	<b>0.0541</b> (0.0711)	<b>0.0287</b> (0.0408)	<b>0.0151</b> (0.0229)	<b>0.0064</b> (0.0101)	<b>0.0019</b> (0.0029)	<b>0.0002</b> (0.0003)	<b>0.0000</b> (0.0000)
<b>0.4383</b> (0.3640)	<b>0.1863</b> (0.1723)	<b>0.1337</b> (0.1452)	<b>0.0908</b> (0.1107)	<b>0.0658</b> (0.0869)	<b>0.0463</b> (0.0652)	<b>0.0260</b> (0.0379)	<b>0.0105</b> (0.0149)	<b>0.0022</b> (0.0026)	<b>0.0002</b> (0.0002)
<b>0.2055</b> (0.1490)	<b>0.1213</b> (0.0979)	<b>0.1476</b> (0.1399)	<b>0.1423</b> (0.1514)	<b>0.1353</b> (0.1559)	<b>0.1171</b> (0.1440)	<b>0.0792</b> (0.1007)	<b>0.0392</b> (0.0486)	<b>0.0109</b> (0.0116)	<b>0.0015</b> (0.0012)
<b>0.0853</b> (0.0570)	<b>0.0696</b> (0.0518)	<b>0.1204</b> (0.1052)	<b>0.1468</b> (0.1440)	<b>0.1686</b> (0.1790)	<b>0.1704</b> (0.1931)	<b>0.1308</b> (0.1532)	<b>0.0758</b> (0.0866)	<b>0.0268</b> (0.0261)	<b>0.0054</b> (0.0039)
<b>0.0355</b> (0.0228)	<b>0.0397</b> (0.0284)	<b>0.0899</b> (0.0755)	<b>0.1325</b> (0.1249)	<b>0.1772</b> (0.1809)	<b>0.1962</b> (0.2136)	<b>0.1670</b> (0.1880)	<b>0.1058</b> (0.1162)	<b>0.0442</b> (0.0414)	<b>0.0120</b> (0.0082)
<b>0.0164</b> (0.0103)	<b>0.0245</b> (0.0172)	<b>0.0682</b> (0.0563)	<b>0.1174</b> (0.1088)	<b>0.1720</b> (0.1726)	<b>0.2089</b> (0.2236)	<b>0.1847</b> (0.2044)	<b>0.1276</b> (0.1378)	<b>0.0596</b> (0.0549)	<b>0.0207</b> (0.0140)
<b>0.0078</b> (0.0049)	<b>0.0154</b> (0.0108)	<b>0.0519</b> (0.0425)	<b>0.1012</b> (0.0932)	<b>0.1645</b> (0.1639)	<b>0.2075</b> (0.2207)	<b>0.1981</b> (0.2178)	<b>0.1437</b> (0.1541)	<b>0.0759</b> (0.0694)	<b>0.0338</b> (0.0227)
<b>0.0032</b> (0.0020)	<b>0.0088</b> (0.0061)	<b>0.0361</b> (0.0296)	<b>0.0825</b> (0.0760)	<b>0.1465</b> (0.1462)	<b>0.2016</b> (0.2146)	<b>0.2020</b> (0.2223)	<b>0.1607</b> (0.1725)	<b>0.0982</b> (0.0899)	<b>0.0606</b> (0.0408)
<b>0.0008</b> (0.0005)	<b>0.0032</b> (0.0023)	<b>0.0180</b> (0.0151)	<b>0.0521</b> (0.0492)	<b>0.1094</b> (0.1118)	<b>0.1682</b> (0.1835)	<b>0.1905</b> (0.2149)	<b>0.1754</b> (0.1930)	<b>0.1408</b> (0.1320)	<b>0.1417</b> (0.0977)
<b>0.0001</b> (0.0000)	<b>0.0004</b> (0.0003)	<b>0.0035</b> (0.0032)	<b>0.0151</b> (0.0156)	<b>0.0426</b> (0.0478)	<b>0.0840</b> (0.1007)	<b>0.1223</b> (0.1515)	<b>0.1558</b> (0.1884)	<b>0.2039</b> (0.2102)	<b>0.3725</b> (0.2822)

 Anpassungsfaktoren über 1.25
  Anpassungsfaktoren unter 0.8

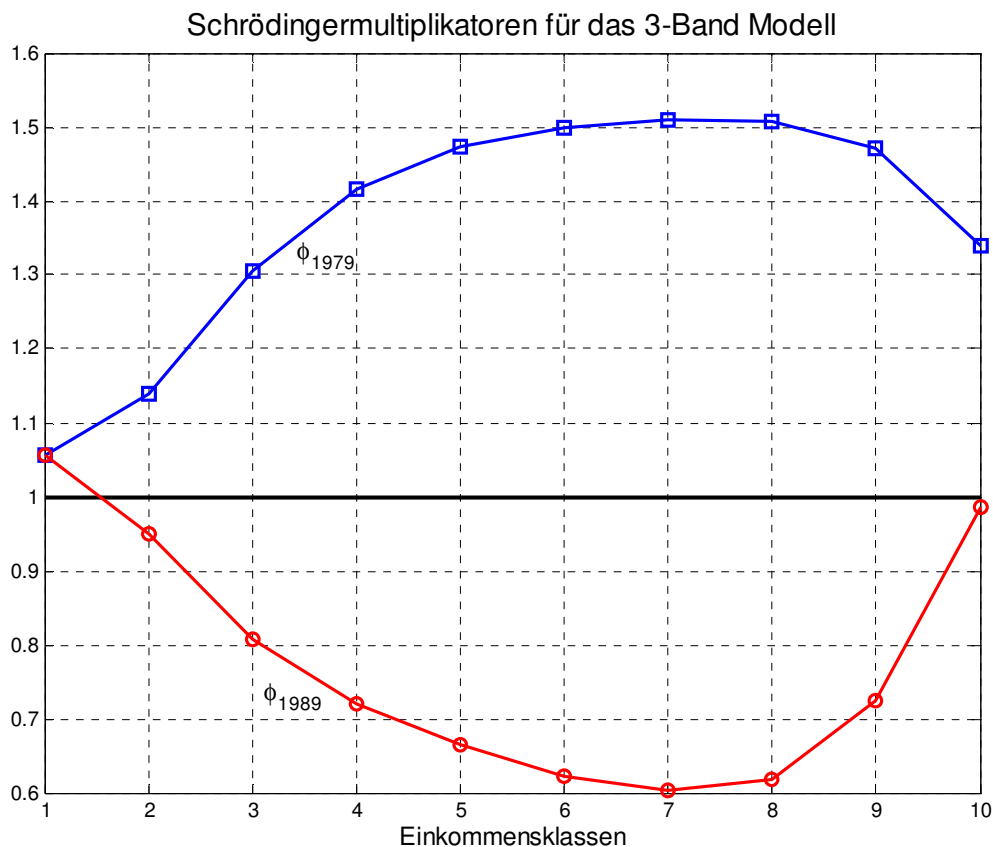
**Tabelle 6-3:** Angepasste Übergangsmatrix  $P_{\text{opt}}$  (fettgedruckt) und Hypothese  $P_{3\text{Band}}^{10}$  (in Klammern) für das 3-Band Modell

Sie weist gewisse interessante Eigenschaften auf. Zum einen ist die Wahrscheinlichkeit des Verbleibs in der untersten Einkommensklasse mit 0.51 relativ hoch. Auch für die nächsten beiden Klassen besteht eine substantielle Wahrscheinlichkeit des Zurückfallens in die unterste Klasse. Für die Klassen drei bis fünf überwiegt die Wahrscheinlichkeit des sozialen Aufstiegs diejenige des Abstiegs klar. Dies ändert sich

<sup>91</sup> Es existieren unendlich viele 3-Bandmatrizen mit  $m_{1979}$  als Gleichgewichtsverteilung. Die hier verwendete Konstruktion folgt der Empfehlung von Boyarsky und Góra (1997, S. 258).

wieder von Klasse sieben an wo die Wahrscheinlichkeit des Abstiegs diejenige eines weiteren Aufstiegs wieder übersteigt.

Tabelle 6-3 sowie die Schrödingermultiplikatoren in Abbildung 6-2 zeigen auf, wie diese Hypothese adjustiert werden muss. Besonders die Wahrscheinlichkeiten des Verbleibs oder des Aufstiegs in die oberste Einkommensklasse müssen stark nach oben angepasst werden. Dasselbe gilt für die Wahrscheinlichkeiten, in eine der untersten zwei Klassen zurückzufallen. Zugleich müssen die Wahrscheinlichkeiten des Aufstiegs aus den untersten drei Einkommensklassen stark reduziert werden. Zudem muss sogar die in der Hypothese schon beachtliche Wahrscheinlichkeit des Verbleibs in der untersten Klasse nach oben angepasst werden, wie aus der angepassten Matrix in Tabelle 6-3 (fettgedruckt) hervorgeht. Verglichen mit der Hypothese zeigt sich durch den Anpassungsschritt eine erhöhte Tendenz zur Segregation.



**Abbildung 6-2:** Schrödingermultiplikatoren der 3-Band-Hypothese

Die Mobilitätsmasse für die 3-Band-Hypothese sind in Tabelle 6-2 zusammengefasst. Es zeigt sich, dass Bartholomew's Index durch den Anpassungsprozess kleiner wird

während die korrespondierende Periodenmobilität zunimmt. Dies bedeutet, dass die angepasste Dynamik, verglichen mit der ursprünglichen Hypothese, im ergodischen Zustand eine geringere, jedoch während des Prozesses der Konvergenz zum Gleichgewichtsindex eine erhöhte Mobilität aufweist. Die auf der angepassten Übergangsmatrix basierenden, durchaus interessanten Einblicke in die zugrundeliegende Einkommensdynamik sowie ihre Implikationen für die zukünftige Entwicklung werden im Vergleich mit allen adjustierten Hypothesen der Kapitel 5 und 6 in Abschnitt 6.2.4 diskutiert.

Der Prais-Mobilitätsindex wird durch den Anpassungsschritt von 0.8694 auf 0.8546 reduziert (vergleiche Tabelle 6-2). Dieser Index zieht jedoch nur die Elemente der Hauptdiagonale in Betracht. Wird die Diagonale in Tabelle 6-3 untersucht, kann leicht festgestellt werden, dass die Verminderung der Mobilität in der optimal angepassten Übergangsmatrix im Vergleich zur Hypothese  $P_{3\text{Band}}^{10}$  durch die Anpassungen nach oben in den obersten zwei sowie in den untersten vier Klassen zustande kam. Die Anpassungen nach unten in den Klassen 5 bis 8 zeigen auf, dass in diesen Klassen die Mobilität im Vergleich zur Hypothese sogar zunahm. So kommt die Abnahme in der globalen Mobilität zustande, weil die Mobilitätsabnahme in den obersten und untersten Klassen die Zunahme in den mittleren Einkommensklassen übersteigt.

### 6.2.3 AR(1)-Hypothese

Die dritte theoriebasierte Hypothese ist ein Gauss'sches AR(1)-Modell für die logarithmierten Einkommen  $y_t$ . Dieser Hypothese liegt die Beobachtung zugrunde, dass sich Einkommensverteilungen gut durch Lognormalverteilungen beschreiben lassen. In der empirischen Forschung entspricht dieses Vorgehen gängiger Praxis.

$$(6-1) \quad y_t = (1-\rho) \cdot \bar{y} + \rho \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{mit} \quad \varepsilon_t \sim \text{IIN}(0, \sigma^2),$$

$$E(y_t) = \bar{y} \quad \forall t, \quad V(y_t) = s^2 \quad \forall t.$$

Hierbei bezeichnet  $\bar{y}$  den Mittelwert der logarithmierten Einkommen, welcher als zeitlich konstant angenommen wird. Dasselbe gilt auch für die Varianz  $s^2$  der logarithmierten Einkommen. Der Absolutwert des autoregressiven Parameters  $\rho$  ist strikt kleiner als eins. Im Gegensatz zu den vorherigen Hypothesen basiert dieser Ansatz

nicht auf der Annahme, dass sich das System im Jahre 1979 in seinem Gleichgewicht befindet. Durch umformen von Gleichung (6-1) und anschliessendes ziehen der Varianz lässt sich für jedes gegebene  $\rho$  die folgende Korrespondenz zwischen der unbedingten Varianz  $s^2$  der logarithmierten Einkommen und der Varianz  $\sigma^2$  des Innovationsterms  $\varepsilon_t$  herleiten:

$$V[y_t - (1-\rho) \cdot \bar{y}] = V[\rho \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t]$$

$$E\left[\left((y_t - (1-\rho) \cdot \bar{y}) - E[y_t - (1-\rho) \cdot \bar{y}]\right)^2\right] = \rho^2 \cdot V[y_{t-1}] + V[\varepsilon_t] + 2 \cdot \underbrace{\text{Cov}[y_{t-1}, \varepsilon_t]}_{\text{unkorreliert}}$$

$$\underbrace{E\left[(y_t - \bar{y})^2\right]}_{V[y_t]} = \rho^2 \cdot s^2 + \sigma^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = (1-\rho^2) \cdot s^2 .$$

Dabei wird  $s^2$  als die geschätzte Querschnittsvarianz des Jahres 1979 betrachtet. Es ist klar, dass nicht mit dem AR(1)-Modell direkt gearbeitet werden kann. Dieses muss durch eine Markovkette approximiert werden, welche mit  $P_{\text{mod}} = P_{\text{AR}(\rho)}$  bezeichnet wird. Für diesen Schritt wird die von Tauchen (1986) vorgeschlagene Methode benutzt. Hierbei sind die Gitterpunkte gerade die Mittelpunkte der logarithmischen Skala der Einkommensklassen (vergleiche Tabelle 5-1). Diese Prozedur führt zu einer Familie von mit  $\rho$  indexierten Übergangsmatrizen  $P_{\text{AR}(\rho)}$ .<sup>92</sup> Wie bei den früheren Hypothesen wird  $\mu$  gleich  $m_{1979}$  gesetzt um die hypothetische zweidimensionale Dichte  $D_{\text{mod}}^* = D_{\text{AR}(\rho)}$  zu generieren:

$$D_{\text{AR}(\rho)} = \text{diag}(m_{1979}) \cdot P_{\text{AR}(\rho)} .$$

Der Parameter  $\rho$  wurde durch Minimierung der relativen Entropie von  $D_{\text{AR}(\rho)}$  hinsichtlich der beobachteten Einkommensverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  über alle  $\rho$  geschätzt. Daraus resultierte ein Wert von 0.764. Die korrespondierende Übergangsmatrix ist in Tabelle 6-4 abgebildet (Werte in Klammern). Sie ähnelt der 3-Band-Hypothese, weist aber etwas weniger Mobilität auf (Tabelle 6-2). Im Vergleich mit der

<sup>92</sup> Im Anhang in Abschnitt 9.3.2.2 wird die Erzeugung der hypothetischen Übergangsmatrix  $P_{\text{AR}(\rho)}$  anhand eines parametrischen Beispiels demonstriert.



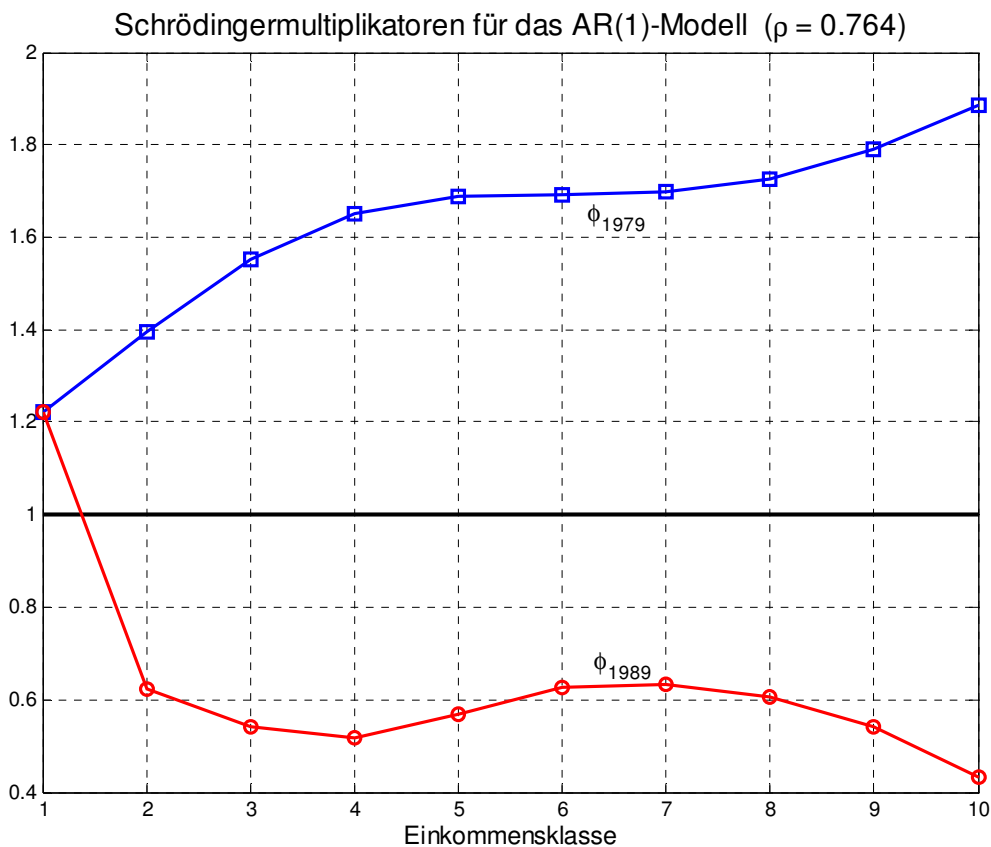
3-Band-Hypothese sind sowohl die Wahrscheinlichkeiten des Aufstiegs aus tiefen Einkommensklassen als auch die Chancen des Verbleibs in der höchsten Klasse erhöht.

Wie bei den vorgängig untersuchten Hypothesen können die notwendigen Anpassungen auch hier am besten durch einen Blick auf Tabelle 6-4 wie auch auf die in Abbildung 6-3 dargestellten Schrödingermultiplikatoren beschrieben werden. Es ist leicht ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeiten des Aufstiegs aus den tiefsten Klassen stark nach unten revidiert werden müssen. Dasselbe gilt für die Chancen des Aufstiegs in die höchste Klasse. Zugleich müssen die Wahrscheinlichkeiten des Verbleibs in der untersten Klasse wie auch diejenigen eines Abstiegs dorthin stark erhöht werden. In den mittleren Klassen benötigt das AR(1)-Modell nur geringe Anpassungen. In den obersten Einkommensklassen erscheint mehr Mobilität notwendig.

<b>0.5660</b> (0.3791)	<b>0.1714</b> (0.2251)	<b>0.1286</b> (0.1943)	<b>0.0771</b> (0.1220)	<b>0.0386</b> (0.0557)	<b>0.0142</b> (0.0185)	<b>0.0034</b> (0.0045)	<b>0.0006</b> (0.0008)	<b>0.0001</b> (0.0001)	<b>0.0000</b> (0.0000)
<b>0.3888</b> (0.2281)	<b>0.1767</b> (0.2032)	<b>0.1690</b> (0.2237)	<b>0.1292</b> (0.1792)	<b>0.0826</b> (0.1044)	<b>0.0387</b> (0.0442)	<b>0.0120</b> (0.0136)	<b>0.0026</b> (0.0030)	<b>0.0004</b> (0.0005)	<b>0.0000</b> (0.0001)
<b>0.2248</b> (0.1186)	<b>0.1473</b> (0.1523)	<b>0.1797</b> (0.2139)	<b>0.1752</b> (0.2185)	<b>0.1428</b> (0.1623)	<b>0.0853</b> (0.0877)	<b>0.0338</b> (0.0345)	<b>0.0093</b> (0.0098)	<b>0.0017</b> (0.0020)	<b>0.0002</b> (0.0003)
<b>0.1064</b> (0.0527)	<b>0.0976</b> (0.0948)	<b>0.1519</b> (0.1698)	<b>0.1889</b> (0.2212)	<b>0.1963</b> (0.2096)	<b>0.1496</b> (0.1444)	<b>0.0756</b> (0.0724)	<b>0.0264</b> (0.0264)	<b>0.0062</b> (0.0070)	<b>0.0011</b> (0.0016)
<b>0.0411</b> (0.0199)	<b>0.0516</b> (0.0490)	<b>0.1025</b> (0.1120)	<b>0.1625</b> (0.1860)	<b>0.2154</b> (0.2248)	<b>0.2094</b> (0.1976)	<b>0.1349</b> (0.1263)	<b>0.0602</b> (0.0587)	<b>0.0182</b> (0.0198)	<b>0.0043</b> (0.0059)
<b>0.0131</b> (0.0063)	<b>0.0222</b> (0.0210)	<b>0.0562</b> (0.0613)	<b>0.1138</b> (0.1299)	<b>0.1924</b> (0.2002)	<b>0.2384</b> (0.2244)	<b>0.1959</b> (0.1829)	<b>0.1114</b> (0.1085)	<b>0.0429</b> (0.0468)	<b>0.0136</b> (0.0186)
<b>0.0035</b> (0.0017)	<b>0.0079</b> (0.0075)	<b>0.0256</b> (0.0279)	<b>0.0662</b> (0.0753)	<b>0.1427</b> (0.1481)	<b>0.2255</b> (0.2117)	<b>0.2364</b> (0.2201)	<b>0.1715</b> (0.1664)	<b>0.0842</b> (0.0915)	<b>0.0366</b> (0.0499)
<b>0.0008</b> (0.0004)	<b>0.0024</b> (0.0022)	<b>0.0098</b> (0.0105)	<b>0.0324</b> (0.0363)	<b>0.0891</b> (0.0909)	<b>0.1796</b> (0.1658)	<b>0.2401</b> (0.2198)	<b>0.2221</b> (0.2120)	<b>0.1391</b> (0.1487)	<b>0.0845</b> (0.1133)
<b>0.0002</b> (0.0001)	<b>0.0006</b> (0.0005)	<b>0.0032</b> (0.0033)	<b>0.0134</b> (0.0145)	<b>0.0471</b> (0.0464)	<b>0.1211</b> (0.1078)	<b>0.2064</b> (0.1824)	<b>0.2436</b> (0.2243)	<b>0.1945</b> (0.2007)	<b>0.1700</b> (0.2201)
<b>0.0000</b> (0.0000)	<b>0.0001</b> (0.0001)	<b>0.0009</b> (0.0009)	<b>0.0047</b> (0.0048)	<b>0.0210</b> (0.0196)	<b>0.0689</b> (0.0582)	<b>0.1497</b> (0.1256)	<b>0.2253</b> (0.1971)	<b>0.2295</b> (0.2249)	<b>0.3000</b> (0.3688)

	Anpassungsfaktoren über 1.25		Anpassungsfaktoren unter 0.8
---	------------------------------	---	------------------------------

**Tabelle 6-4:** Angepasste Übergangsmatrix  $P_{opt}$  (fettgedruckt) und Hypothese  $P_{AR(\rho)}$  (in Klammern) für das AR(1) Modell ( $\rho=0.764$ )



**Abbildung 6-3:** Schrödingermultiplikatoren der AR(1)-Hypothese

Ein Blick auf Bartholomew's Index und den korrespondierenden Periodenmobilitätsindex in Tabelle 6-2 zeigt, dass der Anpassungsprozess, ähnlich wie bei der 3-Band-Hypothese, zu einer Reduktion der Gleichgewichtsmobilität und einer Zunahme der Konvergenzmobilität führt. Die relative Entropie als Abstandsmass zwischen der Hypothese und der Lösungsmenge  $\bar{\mathbf{D}}$  aller zweidimensionalen Dichten mit den beobachteten Randverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  ist hier beinahe doppelt so hoch wie bei der 3-Band-Hypothese. Gleich wie im vorherigen Beispiel liefert die optimal angepasste Matrix (fettgedruckte Zahlen in Tabelle 6-4) auch hier interessante Informationen zur zugrundeliegenden Einkommensdynamik.

Wie bei der 3-Band-Hypothese führt die Anpassung an die Querschnittsdaten auch hier zu einer Reduktion des Mobilitätsindex von Prais. Ein kurzer Blick auf Tabelle 6-4 zeigt, dass die Verringerung der Mobilität in der optimalen Anpassung im Vergleich mit der Hypothese auf die erhöhte Wahrscheinlichkeit des Verbleibs in der untersten sowie in den Einkommensklassen der oberen Mitte (Klassen 6 bis 8) zurückzuführen ist. Hier wird die Wahrscheinlichkeit des Verbleibs in den unteren Mit-

telklassen wie auch in den obersten Klassen reduziert, was in diesen Klassen einer höheren Mobilität gleichkommt.

### 6.2.4 Prognosen

Wie schon im Fall des PSID-Modells im vorherigen Kapitel werden die adjustierten Übergangsmatrizen dazu benutzt, die Verteilung  $m_{1989}$  zehn Jahre in die Zukunft zu projizieren (kurzfristige Entwicklung der Einkommensverteilung). Die entsprechenden Verteilungen des Jahres 1999 sowie die implizierten Gleichgewichtsverteilungen (langfristige Entwicklung der Einkommensverteilung) sind in Tabelle 6-5 enthalten. Zusätzlich werden dort aus Vergleichsgründen die entsprechenden Verteilungen aus der angepassten PSID-Hypothese nochmals aufgeführt. Um die Entwicklung der Ungleichheit zu bestimmen wurde wiederum für alle Verteilungen sowohl Atkinson's Ungleichheitsmass  $A_\epsilon$  als auch der verallgemeinerte Entropieindex  $GE_\alpha$  berechnet.

Einkommens- klasse	Beobachtungen		projizierte Verteilungen					
			angepasstes 3-Band Modell		angepasstes AR(1) Modell		angepasstes PSID Modell	
	$m_{1979}$	$m_{1989}$	$m_{1999}$	$\pi$	$m_{1999}$	$\pi$	$m_{1999}$	$\pi$
1	8.23	10.14	11.69	15.77	11.67	15.98	10.88	11.32
2	4.81	5.64	6.21	7.67	6.16	7.60	5.92	6.08
3	7.13	7.82	7.98	8.46	8.16	9.18	7.99	8.11
4	10.27	10.50	10.30	10.00	10.49	10.77	10.54	10.60
5	14.73	14.19	13.68	12.73	13.73	13.05	14.03	13.99
6	18.23	16.63	15.92	14.52	15.78	14.20	16.14	15.93
7	16.89	14.97	14.32	12.92	14.18	12.33	14.43	14.15
8	11.71	10.67	10.25	9.19	10.25	8.75	10.38	10.17
9	5.46	5.82	5.74	5.15	5.76	4.89	5.81	5.73
10	2.54	3.62	3.91	3.58	3.82	3.26	3.90	3.93
$A_{\epsilon=0.5}$	0.094	0.108	0.115	0.127	0.115	0.127	0.112	0.114
$GE_{\alpha=2}$	0.199	0.235	0.252	0.287	0.253	0.291	0.246	0.252

$m_{1999}$  projizierte Einkommensverteilung 1999 basierend auf der entsprechenden angepassten Übergangsmatrix und der Anfangsverteilung  $m_{1989}$

$\pi$  Gleichgewichtsverteilung der jeweiligen angepassten Übergangsmatrix

$A_{\epsilon=0.5}$  Atkinson's Ungleichheitsindex mit  $\epsilon = 0.5$

$GE_{\alpha=2}$  Verallgemeinerter Entropieindex mit  $\alpha = 2$

**Tabelle 6-5:** Projizierte und gleichgewichtige Verteilungen

Die angepasste Hypothese maximaler Mobilität bildet  $m_{1989}$  auf sich selbst ab, sowohl die Projektion für das Jahr 1999 als auch die Gleichgewichtsverteilung entsprechen in diesem Fall der Verteilung  $m_{1989}$ . Das Modell maximaler Mobilität ist, obschon es von allen Modellen am nächsten bei der Lösungsmenge  $\bar{D}$  liegt (vergleiche Tabelle 6-2 und Tabelle 5-3), ein zu simpler Ansatz um damit etwas über die weitere Entwicklung der US-Einkommensverteilung auszusagen.

In der kurzen Frist sagt die adjustierte 3-Band-Hypothese einen weiteren Anstieg der Ungleichheit in den USA voraus. Man beachte hierbei die Zunahme in der obersten (0.29 Prozentpunkte) wie auch den drei untersten Einkommensklassen (2.28 Prozentpunkte). Langfristig wird eine weitere starke Zunahme der Ungleichheit vorausgesagt, obschon die Dimension der obersten Klasse unter den Wert von 1989 sinkt. Dies weil die untersten drei Klassen, im Vergleich mit der Prognose für das Jahr 1999, stark zunehmen (6.03 Prozentpunkte). Gemäss der 3-Band-Hypothese ist eine grosse Zunahme in den unteren Einkommensklassen zu erwarten.

Die Voraussagen des angepassten AR(1)-Modells sind ziemlich ähnlich wie diejenigen der angepassten 3-Band-Hypothese, sowohl kurz- wie langfristig. So resultiert kurzfristig eine Abnahme in den Klassen 4 bis 9 (2.59 Prozentpunkte) zugunsten einer Zunahme in der höchsten (0.21 Prozentpunkte) sowie den untersten drei Einkommensklassen (2.39 Prozentpunkte). Langfristig wird ein zusätzlicher Abbau in den Klassen 5 bis 10 und eine entsprechende Zunahme in den untersten vier Einkommensklassen um 7.05 Prozentpunkte erwartet, was die beiden Ungleichheitsmasse stark zulegen lässt. Es ist äusserst bemerkenswert, wie ähnlich sich die Voraussagen der beiden Modelle sind, sowohl in der Richtung als auch im Ausmass der Veränderungen.

Von besonderem Interesse ist es nun, die beiden ernsthafteren theoriebasierten Modelle mit der empirischen Hypothese aus Kapitel 5 zu vergleichen. Das adjustierte PSID-Modell sagt ähnliche Resultate voraus wie die angepasste 3-Band-Hypothese und das adjustierte AR(1)-Modell. Sowohl kurz- wie langfristig wird ein Ansteigen der Ungleichheit erwartet. Der Anstieg beider Ungleichheitsmasse fällt jedoch, vor allem in der langfristigen Betrachtung, deutlich weniger prononciert aus. Im Gegensatz zur 3-Band- und zur AR(1)-Hypothese legt die oberste Einkommensklasse langfristig,

verglichen mit dem für 1999 prognostizierten Niveau, gar noch ein bisschen zu. Die langfristige Prognose des PSID-Modells ähnelt, sowohl in der erreichten Verteilung als auch in der Dimension der Ungleichheitsmasse, den kurzfristigen Prognosen der 3-Band- und der AR(1)-Hypothese.

Trotz dieser Differenzen ist es bemerkenswert, dass sich die Aussagen bezüglich der zukünftigen Entwicklung der Einkommensverteilung der USA der hier verwendeten einfachen theoretisch motivierten Hypothesen in qualitativer Hinsicht mit den Prognosen des empirisch motivierten PSID-Modells decken. Da sich jedoch theoretisch hergeleitete Modelle immer an der Empirie messen lassen müssen, legen die quantitativen Differenzen nahe, dass für eine bedenkenlose Verwendung noch ausgereifere theoriebasierte Modelle entwickelt werden sollten.

### **6.3 SCHLUSSBETRACHTUNGEN**

In diesem Kapitel wurde die Methode der Minimierung der relativen Entropie zur Anpassung von theoriebasierten, an die Daten angepassten hypothetischen Übergangsmatrizen an Querschnittsverteilungen zu zwei Zeitpunkten angewandt. Diese Anwendungsart ermöglicht es, auch ohne ein Datenpanel zu Erkenntnissen über die Entwicklung der Einkommensverteilung der USA, im speziellen zum Abbau der Mittelklasse, zu gelangen. Der Grossteil der Abnahme bei den mittleren Einkommen der USA während der Dekade 1979 bis 1989 kam zugunsten eines Wechsels in untere Einkommensklassen zustande. Diese Entwicklung führte zu erhöhter Ungleichheit. Unabhängig von der spezifizierten Hypothese wird, sowohl kurz- wie langfristig, eine Fortsetzung dieses Trends erwartet. Da die 1979'er Daten auf den Mittelwert der 1989'er Daten korrigiert wurden, sind die hier getroffenen Aussagen relativer Natur. Deshalb widersprechen die erhaltenen Resultate nicht der Möglichkeit, dass ökonomisches Wachstum wie eine Welle "alle Boote in die Höhe heben" könnte. Es ist jedoch eine klare Tendenz zu anhaltender Segregation in der US-Gesellschaft festzustellen.

Trotz der Einfachheit der hier vorgestellten theoretischen Modelle kann in aller Deutlichkeit festgestellt werden, dass alle resultierenden Projektionen, nach Verwendung der Methode zur Anpassung der ursprünglichen theoriebasierten Modelle an die

beobachteten Einkommensverteilungen, in dieselbe Richtung weisen wie die Schlussfolgerungen aus dem empirisch hergeleiteten PSID-Modell. So unterscheiden sich die Prognosen der beiden einfachen, jedoch ernstzunehmenden theoretisch motivierten Hypothesen (3-Band- und AR(1)-Modell) sowie der empirischen Hypothese aus Kapitel 5 zumindest in qualitativer Weise kaum.

Die Methode ermöglicht es, alternative Hypothesen über die Einkommensdynamik optimal zu adjustieren. Kapitel 6 hat aufgezeigt, dass auch relativ einfache theoriebasierte Hypothesen der zugrundeliegenden Einkommensdynamik zu vernünftigen Aussagen über die zukünftige Entwicklung der Einkommensverteilung führen. Bei Abwesenheit von Paneldaten erscheint deshalb die Entwicklung umfassenderer theoretischer Hypothesen als vielversprechende Alternative bei der Erforschung der Einkommensdynamik. Die Weiterentwicklung theoretischer Modelle erscheint auch im Lichte der quantitativen Unterschiede zwischen der empirischen PSID-Hypothese und der untersuchten theoriebasierten Hypothesen angebracht, wenn solchen Modellen breite wissenschaftliche Akzeptanz entgegengebracht werden soll.

Eine weitere, hier jedoch nicht vorgestellte Option zur Untersuchung der Einkommensentwicklung bei Abwesenheit eines vernünftigen Datenpanels wäre eine Kombination mit Paneldaten aus einem Land mit ähnlichen ökonomischen Voraussetzungen. So könnte die so generierte empirische Hypothese dazu verwendet werden, die Einkommensdynamik in einem Staat abzuschätzen, für den keine Paneldaten zugänglich sind. Theoriebasierte Hypothesen haben jedoch den Vorteil, dass sie immer angewendet werden können, sobald Querschnittsdaten zugänglich sind. Gelänge es, eine solche Theorie der Einkommensdynamik wissenschaftlich breit abzustützen, liessen sich, wegen des Fehlens geeigneter Datenpanels in den meisten Ländern, Mobilitätsvergleiche sowie Vergleiche über die Entwicklung der Einkommensdynamik auf viel breiterer Basis durchführen.

## **7 VERGLEICH DER EINKOMMENS-DYNAMIKEN VON FRAUEN UND MÄNNERN**

### **7.1 EINLEITUNG**

Neben Fragen der Einkommensverteilung sowie der sozialen Mobilität sind oft auch Fragestellungen zu Unterschieden im Prozess der Einkommensgenerierung zwischen verschiedenen sozialen Gruppen von Interesse. So lässt sich die in Kapitel 2 eingeführte Methodik auch für die Analyse solcher Probleme gewinnbringend einbringen. In diesem Abschnitt soll konkret die Fragestellung untersucht werden, ob die Dynamik des Einkommensprozesses der Frauen genügend genau durch jene der Männer beschrieben werden kann. Es geht somit hier nicht um die Frage unterschiedlicher Einkommen von Männern und Frauen. Es soll bloss die Fragestellung untersucht werden, ob die Veränderungen der Einkommensverteilung bei den Frauen ähnlich verlaufen wie bei den Männern. Mit anderen Worten wird hier untersucht, ob die soziale Mobilität bei Männern und Frauen vergleichbar ist oder nicht.

Hierzu werden die Einkommensdynamiken von Männern und Frauen in den USA anhand des PSID-Datensatzes verglichen (siehe Abschnitt 4.2). Anhand dieses Datensatzes werden einerseits die Einkommensdynamik der Männer und andererseits die Querschnittsverteilungen der Frauen geschätzt. Die Männerdynamik wird dann bei der Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie als Hypothese bei der Fragestellung verwendet, ob sich die Dynamik der Frauen durch diejenige der Männer erklären lässt.

Der PSID-Datensatz enthält jedoch mehr Information als eigentlich benötigt wird. Deshalb lässt sich die Dynamik der Frauen auch direkt schätzen und nicht bloss über die Anpassung der Männerdynamik an die Randverteilungen der Frauen. Diese zusätzliche Information ermöglicht somit obendrein eine Abschätzung der Wirksamkeit des Anpassungsprozesses.

## 7.2 DIE DATENLAGE

Die 6'775 Personen des PSID-Datensatzes aus Kapitel 5 wurden nach Geschlecht getrennt. Daraus resultierte je ein Datensatz für die Männer (3'386 Individuen) und die Frauen (3'389 Individuen). Bei beiden resultierenden Datensätzen wurden die Einkommen beider Jahre auf den Mittelwert der 1989'er CPS-Daten von Burkhauser et. al. (1999) gebracht (vergleiche Abschnitt 4.2). Da ökonomisches Wachstum dadurch eliminiert wurde, sind die Resultate dann immer relativer Natur. Die so generierten Einkommensdaten wurden anhand der selben Einkommensgrenzen wie bei den Beispielen der vorangegangenen zwei Kapitel eingeteilt (vergleiche Abschnitt 5.2 sowie 9.3.2 zur Festlegung der Einkommensgrenzen). Die resultierenden Verteilungen sind in Tabelle 7-1 wiedergegeben.

Einkommensklassen	Verteilungen der Männer		Verteilungen der Frauen, Randverteilungen	
	$\mu_{1979}$	$\mu_{1989}$	$m_{1979}$	$m_{1989}$
( $-\infty$ , 5'790 ]	14.35	11.72	14.87	13.72
( 5'790 , 7'762 ]	3.69	6.11	5.16	9.77
( 7'762 , 10'407 ]	6.00	8.77	8.76	8.79
( 10'407 , 13'954 ]	9.98	10.57	9.65	10.18
( 13'954 , 18'708 ]	12.23	14.29	10.80	10.95
( 18'708 , 25'083 ]	14.80	16.57	13.16	11.86
( 25'083 , 33'630 ]	19.11	14.80	13.87	12.01
( 33'630 , 45'090 ]	11.40	8.68	12.30	10.86
( 45'090 , 60'454 ]	4.93	4.43	7.49	7.49
( 60'454 , $\infty$ )	3.51	4.05	3.92	4.37
$A_{\varepsilon=0.5}$	0.110	0.114	0.126	0.135
$GE_{\alpha=2}$	0.230	0.257	0.265	0.297

$A_{\varepsilon=0.5}$  Atkinson's Ungleichheitsindex mit  $\varepsilon = 0.5$

$GE_{\alpha=2}$  Verallgemeinerter Entropieindex mit  $\alpha = 2$

**Tabelle 7-1:** Verteilungen der Männer und Frauen aus den PSID-Daten

Tabelle 7-1 belegt auch das Phänomen der Zunahme der Ungleichheit zwischen den Jahren 1979 und 1989. Die Daten zeigen auch, dass die Ungleichheit bei den Frauen deutlich stärker ausgeprägt ist und dass auch die Zunahme der Ungleichheit in der betrachteten Periode deutlicher ausfiel. Eine Betrachtung der Streudiagramme aus Abschnitt 9.3.2.1 untermauert diese Beobachtung eindrücklich. Die Verteilung der Frauen ist breiter und dadurch ist auch die Mittelklasse weniger ausgeprägt als bei



den Männern. Der Grund hierfür dürfte wohl in erster Linie in der Tatsache begründet sein, dass Frauen häufiger Teilzeit arbeiten und öfters aus dem Erwerbsleben ausscheiden und wieder einsteigen als Männer, die ihrerseits mehrheitlich Vollzeitstellen besetzen. Durch die Mittelwertsadjustierung auf denselben Mittelwert wird natürlich auch das Faktum eliminiert, dass Männer im Durchschnitt höhere Löhne erzielen. Da hier jedoch nur die Einkommensdynamik innerhalb der Geschlechter verglichen werden soll, interessieren solche geschlechtsspezifischen Unterschiede nicht.

Zunächst wird aus den Daten für die Männer die hypothetische Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  geschätzt. Aus den Daten für die Frauen werden die Randverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  geschätzt, an welche die Hypothese dann angepasst werden muss. Um die Methode der Minimierung der relativen Entropie anwenden zu können, muss nun eine zu  $P_{\text{mod}}$  gehörige hypothetische zweidimensionale Dichtematrix gemäss  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu) \cdot P_{\text{mod}}$  generiert werden. Obschon aus Abschnitt 2.4 bekannt ist, dass  $\mu = m_{1979}$  die eindeutig bestmögliche Hypothese  $D_{\text{mod}}^*$  aus der Menge  $\bar{D}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}})$  aller mit  $P_{\text{mod}}$  kompatiblen hypothetischen zweidimensionalen Dichten generiert, wird hier noch eine zweite Hypothese aufgestellt. Die zweite Hypothese wird vollständig aus den Daten der Männer gemäss  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu_{1979}) \cdot P_{\text{mod}}$  erstellt. Diese zweite Hypothese wird hier dargestellt, weil ohne sie die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.4 ausgeblieben wären.<sup>93</sup> Um dieser historischen Entwicklung Rechnung zu tragen und um zu demonstrieren, dass wissenschaftliche Erkenntnisse oft aus Zufall und Intuiti-

---

<sup>93</sup> Bei der Entwicklung der Methode der Minimierung der relativen Entropie herrschte lange eine gewisse Unsicherheit bei der Wahl von  $\mu$  zur Bestimmung der hypothetischen Dichtematrix  $D_{\text{mod}}$ . Dies deshalb, weil mit der Irrelevanz von  $\mu$  für die Bestimmung der optimal angepassten Dynamik nicht gerechnet wurde. Dass in den Kapiteln 5 und 6 unbewusst die jeweils bestmöglichen Hypothesen aufgestellt wurden, war nur darauf zurückzuführen, dass bei den theoriebasierten Modellen von Kapitel 6 keine andere, vertretbare Alternative zur Verfügung stand. Die empirische Hypothese aus Kapitel 5 wurde nur deshalb auf dieselbe Weise erstellt, weil sie mit den theoriebasierten Modellen kompatibel gehalten werden sollte. Ansonsten wäre sie sicherlich, analog zu Abschnitt 7.3.2, gänzlich aus den PSID-Daten erstellt worden. Da beim Bestimmen der Modelldynamik  $P_{\text{mod}}$  aus empirischen Daten immer zuerst die entsprechende zweidimensionale Dichte geschätzt wird, wäre diese Vorgehensweise, ohne die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.4, am naheliegendsten.

on entstehen, wird in diesem Kapitel neben der bestmöglichen Hypothese  $D_{\text{mod}}^*$  auch die "schlechtere", vollständig aus den PSID-Paneldaten der Männer generierte Hypothese vorgestellt.<sup>94</sup>

## 7.3 EMPIRISCHE RESULTATE

### 7.3.1 Erste Hypothese

Wie in den Kapiteln 5 und 6 wird die hypothetische zweidimensionale Dichte  $D_{\text{mod}}^*$  gemäss den Erkenntnissen aus Abschnitt 2.4 durch Vermengung der hypothetischen, aus den Daten der Männer geschätzten Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  mit der beobachteten Anfangsverteilung  $m_{1979}$  der Frauen geschätzt:

$$D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_{1979}) \cdot P_{\text{mod}} .$$

Die aus diesem Vorgehen entstandene hypothetische Dichtematrix ist in Tabelle 7-2 dargestellt.

		Einkommensklasse 1989									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1979	1	0.0497	0.0129	0.0153	0.0159	0.0202	0.0178	0.0102	0.0043	0.0013	0.0010
	2	0.0167	0.0074	0.0072	0.0067	0.0056	0.0035	0.0026	0.0011	0.0004	0.0004
	3	0.0204	0.0121	0.0148	0.0127	0.0108	0.0082	0.0052	0.0020	0.0008	0.0005
	4	0.0161	0.0101	0.0149	0.0150	0.0157	0.0125	0.0074	0.0031	0.0011	0.0003
	5	0.0099	0.0080	0.0128	0.0163	0.0223	0.0206	0.0116	0.0045	0.0016	0.0004
	6	0.0064	0.0062	0.0103	0.0152	0.0243	0.0307	0.0233	0.0096	0.0036	0.0020
	7	0.0036	0.0040	0.0076	0.0115	0.0186	0.0299	0.0327	0.0186	0.0077	0.0044
	8	0.0022	0.0023	0.0042	0.0072	0.0129	0.0208	0.0288	0.0234	0.0126	0.0088
	9	0.0011	0.0007	0.0017	0.0036	0.0063	0.0097	0.0143	0.0143	0.0115	0.0118
	10	0.0005	0.0003	0.0007	0.0011	0.0018	0.0031	0.0052	0.0052	0.0060	0.0154

**Tabelle 7-2:** Hypothetische zweidimensionale Dichte  $D_{\text{mod}}^*$

<sup>94</sup> Analog zu Kapitel 5 wurden auch hier die beiden Hypothesen mittels zweidimensionaler Kerndichteschätzung generiert, um Nullelemente in den hypothetischen Dynamiken zu vermeiden. Die Dynamiken wurden mit einem zweidimensional normalverteilten Kern und automatisch bestimmter

Die zur Berechnung der optimal angepassten Dichte  $D_{\text{opt}}$  notwendigen Anpassungsfaktoren für alle Zellen der Hypothese  $D_{\text{mod}}^*$  sind in Tabelle 7-3 wiedergegeben.

		Einkommensklasse 1989									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1979	1	1.0795	1.5023	0.9656	0.9480	0.7710	0.7366	0.8346	1.2536	1.6268	1.0036
	2	1.0326	1.4370	0.9237	0.9068	0.7375	0.7046	0.7983	1.1991	1.5561	0.9600
	3	1.0545	1.4675	0.9433	0.9260	0.7532	0.7195	0.8152	1.2245	1.5891	0.9803
	4	1.0975	1.5273	0.9817	0.9638	0.7839	0.7489	0.8485	1.2744	1.6539	1.0203
	5	1.1518	1.6030	1.0303	1.0115	0.8227	0.7859	0.8905	1.3376	1.7358	1.0708
	6	1.1708	1.6294	1.0473	1.0282	0.8362	0.7989	0.9052	1.3596	1.7644	1.0885
	7	1.1327	1.5763	1.0132	0.9947	0.8090	0.7729	0.8757	1.3153	1.7069	1.0530
	8	1.0667	1.4845	0.9542	0.9368	0.7619	0.7279	0.8247	1.2388	1.6076	0.9917
	9	1.0154	1.4130	0.9082	0.8917	0.7252	0.6928	0.7850	1.1791	1.5301	0.9440
	10	0.9989	1.3901	0.8935	0.8772	0.7135	0.6816	0.7723	1.1600	1.5053	0.9287

Anpassungsfaktoren über 1.25     
  Anpassungsfaktoren unter 0.8

**Tabelle 7-3:** "Wahrscheinlichste" Anpassungen pro Zelle (Kreuzprodukt von  $\phi_{1979}^*$  und  $\phi_{1989}^*$ )

Es handelt sich dabei um das Kreuzprodukt  $\Phi^* = \phi_{1979}^* \cdot \phi_{1989}^*$  der Vektoren der Schrödingermultiplikatoren (vergleiche Abschnitt 2.3.2). Tabelle 7-2 und Tabelle 7-3 dienen vor allem dem Vergleich mit der Hypothese aus dem nächsten Abschnitt.

		Einkommensklasse 1989									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1979	1	0.0537	0.0194	0.0148	0.0151	0.0156	0.0131	0.0085	0.0054	0.0021	0.0010
	2	0.0173	0.0107	0.0066	0.0060	0.0042	0.0025	0.0021	0.0013	0.0006	0.0004
	3	0.0216	0.0178	0.0140	0.0117	0.0082	0.0059	0.0042	0.0024	0.0013	0.0005
	4	0.0177	0.0155	0.0147	0.0145	0.0123	0.0094	0.0063	0.0040	0.0018	0.0004
	5	0.0114	0.0128	0.0132	0.0165	0.0183	0.0162	0.0103	0.0060	0.0028	0.0005
	6	0.0075	0.0102	0.0108	0.0156	0.0203	0.0245	0.0211	0.0131	0.0064	0.0022
	7	0.0041	0.0064	0.0077	0.0114	0.0151	0.0231	0.0286	0.0245	0.0132	0.0046
	8	0.0024	0.0034	0.0040	0.0067	0.0098	0.0151	0.0238	0.0290	0.0202	0.0087
	9	0.0011	0.0010	0.0015	0.0032	0.0045	0.0067	0.0113	0.0168	0.0176	0.0111
	10	0.0005	0.0005	0.0006	0.0009	0.0013	0.0021	0.0040	0.0060	0.0090	0.0143

**Tabelle 7-4:** Optimal angepasste zweidimensionale Dichte  $D_{\text{opt}}$

Die Elementweise Multiplikation der Hypothese  $D_{\text{mod}}^*$  mit der Anpassungsmatrix  $\Phi^*$  führt zur optimal angepassten zweidimensionalen Dichte  $D_{\text{opt}}$ , welche in Tabelle 7-4 dargestellt ist.

Um die Auswirkungen des Anpassungsprozesses auf die Hypothese zu verstehen ist ein Blick auf die entsprechenden Transitionsmatrizen angebracht. Hierzu werden, analog zu den vorangehenden zwei Kapiteln, die Hypothese (in Klammern) und die optimale Anpassung (fettgedruckt) in Form von Übergangsmatrizen in Tabelle 7-5 wiedergegeben. Hierbei stechen Erkenntnisse ins Auge, die auch schon beim Vergleich der Einkommensverteilungen von Männern und Frauen (Tabelle 7-1) ersichtlich wurden. So muss die Wahrscheinlichkeit des Auf- respektive Abstiegs in die mittleren Klassen für die Frauen im Vergleich mit den Männern stark reduziert werden. Dasselbe gilt, wiederum für alle Startklassen, mit umgekehrtem Vorzeichen für die zweitunterste und die zweithöchste Einkommensklasse. Auch die Wahrscheinlichkeit eines Aufstiegs in die dritthöchste Klasse wird durch den Anpassungsprozess stark angehoben.

<b>0.3610</b> (0.3344)	<b>0.1307</b> (0.0870)	<b>0.0996</b> (0.1032)	<b>0.1016</b> (0.1071)	<b>0.1047</b> (0.1358)	<b>0.0881</b> (0.1196)	<b>0.0571</b> (0.0684)	<b>0.0366</b> (0.0292)	<b>0.0139</b> (0.0085)	<b>0.0067</b> (0.0067)
<b>0.3348</b> (0.3242)	<b>0.2067</b> (0.1438)	<b>0.1286</b> (0.1392)	<b>0.1169</b> (0.1289)	<b>0.0804</b> (0.1091)	<b>0.0476</b> (0.0675)	<b>0.0403</b> (0.0505)	<b>0.0261</b> (0.0217)	<b>0.0112</b> (0.0072)	<b>0.0075</b> (0.0078)
<b>0.2460</b> (0.2333)	<b>0.2034</b> (0.1386)	<b>0.1593</b> (0.1689)	<b>0.1337</b> (0.1444)	<b>0.0931</b> (0.1237)	<b>0.0675</b> (0.0939)	<b>0.0482</b> (0.0591)	<b>0.0279</b> (0.0228)	<b>0.0149</b> (0.0094)	<b>0.0060</b> (0.0061)
<b>0.1836</b> (0.1673)	<b>0.1606</b> (0.1052)	<b>0.1521</b> (0.1549)	<b>0.1501</b> (0.1557)	<b>0.1279</b> (0.1631)	<b>0.0972</b> (0.1298)	<b>0.0652</b> (0.0769)	<b>0.0414</b> (0.0325)	<b>0.0183</b> (0.0111)	<b>0.0037</b> (0.0036)
<b>0.1054</b> (0.0915)	<b>0.1189</b> (0.0742)	<b>0.1222</b> (0.1186)	<b>0.1531</b> (0.1514)	<b>0.1695</b> (0.2060)	<b>0.1500</b> (0.1908)	<b>0.0954</b> (0.1072)	<b>0.0556</b> (0.0416)	<b>0.0256</b> (0.0147)	<b>0.0043</b> (0.0040)
<b>0.0572</b> (0.0489)	<b>0.0772</b> (0.0474)	<b>0.0822</b> (0.0784)	<b>0.1184</b> (0.1152)	<b>0.1541</b> (0.1843)	<b>0.1862</b> (0.2331)	<b>0.1600</b> (0.1768)	<b>0.0994</b> (0.0731)	<b>0.0486</b> (0.0275)	<b>0.0167</b> (0.0153)
<b>0.0295</b> (0.0260)	<b>0.0459</b> (0.0291)	<b>0.0555</b> (0.0547)	<b>0.0825</b> (0.0829)	<b>0.1086</b> (0.1342)	<b>0.1667</b> (0.2158)	<b>0.2063</b> (0.2356)	<b>0.1763</b> (0.1340)	<b>0.0953</b> (0.0558)	<b>0.0334</b> (0.0317)
<b>0.0192</b> (0.0180)	<b>0.0273</b> (0.0184)	<b>0.0324</b> (0.0340)	<b>0.0546</b> (0.0583)	<b>0.0796</b> (0.1045)	<b>0.1230</b> (0.1690)	<b>0.1931</b> (0.2341)	<b>0.2356</b> (0.1902)	<b>0.1645</b> (0.1023)	<b>0.0706</b> (0.0712)
<b>0.0152</b> (0.0149)	<b>0.0138</b> (0.0098)	<b>0.0202</b> (0.0222)	<b>0.0433</b> (0.0485)	<b>0.0606</b> (0.0835)	<b>0.0892</b> (0.1288)	<b>0.1503</b> (0.1914)	<b>0.2242</b> (0.1901)	<b>0.2351</b> (0.1536)	<b>0.1483</b> (0.1571)
<b>0.0119</b> (0.0119)	<b>0.0122</b> (0.0088)	<b>0.0161</b> (0.0180)	<b>0.0241</b> (0.0274)	<b>0.0324</b> (0.0453)	<b>0.0539</b> (0.0791)	<b>0.1019</b> (0.1320)	<b>0.1536</b> (0.1324)	<b>0.2292</b> (0.1522)	<b>0.3648</b> (0.3928)



Anpassungsfaktoren über 1.25



Anpassungsfaktoren unter 0.8

**Tabelle 7-5:** Angepasste Übergangsmatrix  $P_{\text{opt}}$  (fettgedruckt) und Hypothese  $P_{\text{mod}}$  (in Klammern)

### 7.3.2 Zweite Hypothese

Im Unterschied zur ersten Hypothese wird hier die hypothetische zweidimensionale Dichtematrix  $D_{\text{mod}}$  direkt aus der Schätzung der Übergangsdynamik der Männer übernommen. Durch Einbezug der Anfangsverteilung  $\mu_{1979}$  der Männer (Tabelle 7-1) lässt sich die zweite Hypothese folgendermassen formulieren:

$$D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu_{1979}) \cdot P_{\text{mod}} .$$

Es kommt somit nicht zu einer Vermischung von Hypothese und beobachteter Anfangsverteilung. Die vollständig aus der Einkommensdynamik der Männer generierte hypothetische zweidimensionale Dichte ist in Tabelle 7-6 dargestellt.

		Einkommensklasse 1989									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1979	1	0.0480	0.0125	0.0148	0.0154	0.0195	0.0172	0.0098	0.0042	0.0012	0.0010
	2	0.0120	0.0053	0.0051	0.0048	0.0040	0.0025	0.0019	0.0008	0.0003	0.0003
	3	0.0140	0.0083	0.0101	0.0087	0.0074	0.0056	0.0035	0.0014	0.0006	0.0004
	4	0.0167	0.0105	0.0155	0.0155	0.0163	0.0130	0.0077	0.0032	0.0011	0.0004
	5	0.0112	0.0091	0.0145	0.0185	0.0252	0.0233	0.0131	0.0051	0.0018	0.0005
	6	0.0072	0.0070	0.0116	0.0170	0.0273	0.0345	0.0262	0.0108	0.0041	0.0023
	7	0.0050	0.0056	0.0105	0.0158	0.0256	0.0412	0.0450	0.0256	0.0107	0.0061
	8	0.0021	0.0021	0.0039	0.0066	0.0119	0.0193	0.0267	0.0217	0.0117	0.0081
	9	0.0007	0.0005	0.0011	0.0024	0.0041	0.0064	0.0094	0.0094	0.0076	0.0077
	10	0.0004	0.0003	0.0006	0.0010	0.0016	0.0028	0.0046	0.0047	0.0053	0.0138

**Tabelle 7-6:** Hypothetische zweidimensionale Dichte  $D_{\text{mod}}$

Ein Vergleich mit der ersten Hypothese  $D_{\text{mod}}^*$  (Tabelle 7-2) zeigt doch zum Teil deutliche Unterschiede der beiden hypothetischen Dichtematrizen auf. So ist zum Beispiel die unbedingte Wahrscheinlichkeit, in beiden Jahren in der obersten Einkommensklasse zu sein, hier deutlich tiefer. Andererseits sind die Wahrscheinlichkeiten deutlich höher, zu beiden Zeitpunkten in den mittleren Klassen 5, 6 oder 7 zu sein. Dies bestätigt die oben getätigte Aussage, dass die Mittelklasse bei den Männern deutlich ausgeprägter ist als bei den Frauen (vergleiche auch die Verteilungen in Tabelle 7-1). Bei der ersten Hypothese wird dieses Faktum, durch die Vermischung mit der Anfangsverteilung der Frauen, schon partiell Teil der Hypothese. So wird klar, dass die zweite Hypothese insgesamt stärker an die Randverteilungen angepasst werden muss als das erste Modell. Dies leuchtet auch intuitiv ein, da bei der ersten Hypothe-

se mit der beobachteten Anfangsverteilung schon ein Teil der Beobachtungen, an welche das Modell ja angepasst werden soll, in die Hypothese einfließt.

In Tabelle 7-7 ist die Matrix  $\Phi = \phi_{1979} \cdot \phi_{1989}'$  der Anpassungsfaktoren dargestellt. Ein Vergleich dieser Matrix mit derjenigen der ersten Hypothese (Tabelle 7-3) zeigt, dass sich diese ebenfalls deutlich voneinander unterscheiden. So sind die notwendigen Anpassungen hier insgesamt deutlich stärker. Dies wird auch durch einen Blick auf die relativen Entropien der beiden Hypothesen hinsichtlich des optimal angepassten Modells in Tabelle 7-10 verdeutlicht. So ist  $D_{\text{mod}}^*$  deutlich näher bei  $D_{\text{opt}}$  als die zweite Hypothese  $D_{\text{mod}}$ .

		Einkommensklasse 1989									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1979	1	1.1185	1.5565	1.0005	0.9822	0.7989	0.7632	0.8647	1.2989	1.6855	1.0398
	2	1.4443	2.0100	1.2920	1.2684	1.0316	0.9855	1.1166	1.6772	2.1766	1.3428
	3	1.5414	2.1451	1.3788	1.3536	1.1009	1.0518	1.1917	1.7900	2.3229	1.4330
	4	1.0608	1.4763	0.9489	0.9316	0.7577	0.7238	0.8201	1.2319	1.5986	0.9862
	5	1.0174	1.4159	0.9101	0.8934	0.7267	0.6942	0.7865	1.1814	1.5332	0.9458
	6	1.0414	1.4492	0.9315	0.9145	0.7438	0.7106	0.8051	1.2093	1.5693	0.9681
	7	0.8221	1.1440	0.7353	0.7219	0.5872	0.5609	0.6355	0.9546	1.2388	0.7643
	8	1.1514	1.6023	1.0299	1.0111	0.8224	0.7856	0.8902	1.3371	1.7351	1.0704
	9	1.5429	2.1472	1.3802	1.3550	1.1020	1.0528	1.1929	1.7918	2.3252	1.4344
	10	1.1154	1.5523	0.9978	0.9796	0.7967	0.7611	0.8624	1.2953	1.6810	1.0370

Anpassungsfaktoren über 1.25     
  Anpassungsfaktoren unter 0.8

**Tabelle 7-7:** "Wahrscheinlichste" Anpassungen pro Zelle (Kreuzprodukt von  $\phi_{1979}$  und  $\phi_{1989}$ )

Die Zellenweisen Produkte der jeweiligen hypothetischen Dichten mit ihren Anpassungsmatrizen führt jedoch für beide Hypothesen zur selben optimal angepassten zweidimensionalen Dichte  $D_{\text{opt}}$ , wie sie in Tabelle 7-4 abgebildet ist. Somit ist natürlich auch die optimal angepasste Übergangsmatrix für beide Hypothesen identisch. Da auf der Ebene der Übergangsmatrizen sowohl die ursprüngliche wie auch die optimal adjustierte Hypothese identisch sind, gelten sowohl die Darstellung in Tabelle 7-5 wie auch die daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen für beide Hypothesen. Dieses Resultat führte dann zum Beweis von Abschnitt 2.4, dass, bei gegebener hypothetischer Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$ , die Wahl der Anfangsverteilung  $\mu$  zur Erstellung der hypothetischen zweidimensionalen Dichte gemäss  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu) \cdot P_{\text{mod}}$  für

die Berechnung der optimal angepassten Dynamik  $D_{opt}$  respektive  $P_{opt}$  irrelevant ist. Zudem führten diese Beobachtungen auch zum Beweis, dass die Gleichsetzung von  $\mu$  mit der beobachteten Anfangsverteilung  $m_{1979}$  zur bestmöglichen, mit  $P_{mod}$  kompatiblen hypothetischen zweidimensionalen Dichte  $D_{mod}^*$  führt.

### 7.3.3 Vergleich der Hypothesen mit der "wahren" Dynamik

#### 7.3.3.1 "Wahre" Frauendynamik und Csiszár Projektionen

Da auch die Daten der Frauen aus dem PSID-Panel entnommen wurden, kann die Dynamik der Frauen auch direkt geschätzt werden. Diese Schätzung entspricht dann im hier vorgestellten Kontext der "wahren" Einkommensdynamik  $D_{wahr}$  der Frauen. Diese zweidimensionale Dichtematrix ist in Tabelle 7-8 dargestellt. Wie die beiden Hypothesen wurde auch  $D_{wahr}$  mittels zweidimensionaler Kerndichteschätzung aus den Daten bestimmt, zwecks Vermeidung von Nullelementen in der Matrix (vergleiche Fussnote 94, S. 124).

		Einkommensklasse 1989									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1979	1	0.0353	0.0178	0.0152	0.0185	0.0195	0.0182	0.0115	0.0074	0.0035	0.0017
	2	0.0108	0.0099	0.0079	0.0060	0.0051	0.0049	0.0033	0.0022	0.0010	0.0005
	3	0.0174	0.0190	0.0155	0.0111	0.0078	0.0065	0.0045	0.0032	0.0018	0.0007
	4	0.0172	0.0159	0.0150	0.0148	0.0109	0.0087	0.0066	0.0042	0.0023	0.0010
	5	0.0170	0.0115	0.0115	0.0158	0.0156	0.0146	0.0107	0.0065	0.0033	0.0014
	6	0.0171	0.0103	0.0098	0.0157	0.0210	0.0219	0.0175	0.0109	0.0051	0.0023
	7	0.0117	0.0067	0.0070	0.0111	0.0160	0.0215	0.0265	0.0220	0.0113	0.0049
	8	0.0077	0.0041	0.0041	0.0057	0.0085	0.0143	0.0244	0.0278	0.0181	0.0085
	9	0.0025	0.0018	0.0015	0.0022	0.0035	0.0057	0.0108	0.0172	0.0180	0.0116
	10	0.0004	0.0006	0.0005	0.0008	0.0014	0.0023	0.0043	0.0072	0.0105	0.0112

**Tabelle 7-8:** "Wahre" zweidimensionale Dichte der Frauen  $D_{wahr}$ .

Für einen Vergleich der "wahren" mit der optimal adjustierten Dynamik eignen sich jedoch die entsprechenden Übergangsmatrizen besser. Deshalb wird in Tabelle 7-9 die "wahre" Übergangsmatrix der Frauen (fettgedruckt) der optimal adjustierten Transitionsmatrix (in Klammern) gegenübergestellt.

<b>0.2376</b> (0.3610)	<b>0.1200</b> (0.1307)	<b>0.1022</b> (0.0996)	<b>0.1246</b> (0.1016)	<b>0.1314</b> (0.1047)	<b>0.1221</b> (0.0881)	<b>0.0772</b> (0.0571)	<b>0.0495</b> (0.0366)	<b>0.0238</b> (0.0139)	<b>0.0115</b> (0.0067)
<b>0.2086</b> (0.3348)	<b>0.1911</b> (0.2067)	<b>0.1531</b> (0.1286)	<b>0.1159</b> (0.1169)	<b>0.0997</b> (0.0804)	<b>0.0946</b> (0.0476)	<b>0.0641</b> (0.0403)	<b>0.0430</b> (0.0261)	<b>0.0203</b> (0.0112)	<b>0.0095</b> (0.0075)
<b>0.1984</b> (0.2460)	<b>0.2174</b> (0.2034)	<b>0.1771</b> (0.1593)	<b>0.1268</b> (0.1337)	<b>0.0894</b> (0.0931)	<b>0.0746</b> (0.0675)	<b>0.0516</b> (0.0482)	<b>0.0364</b> (0.0279)	<b>0.0208</b> (0.0149)	<b>0.0075</b> (0.0060)
<b>0.1783</b> (0.1836)	<b>0.1646</b> (0.1606)	<b>0.1555</b> (0.1521)	<b>0.1537</b> (0.1501)	<b>0.1132</b> (0.1279)	<b>0.0901</b> (0.0972)	<b>0.0680</b> (0.0652)	<b>0.0433</b> (0.0414)	<b>0.0234</b> (0.0183)	<b>0.0100</b> (0.0037)
<b>0.1578</b> (0.1054)	<b>0.1068</b> (0.1189)	<b>0.1062</b> (0.1222)	<b>0.1460</b> (0.1531)	<b>0.1448</b> (0.1695)	<b>0.1351</b> (0.1500)	<b>0.0995</b> (0.0954)	<b>0.0603</b> (0.0556)	<b>0.0307</b> (0.0256)	<b>0.0127</b> (0.0043)
<b>0.1303</b> (0.0572)	<b>0.0781</b> (0.0772)	<b>0.0742</b> (0.0822)	<b>0.1195</b> (0.1184)	<b>0.1594</b> (0.1541)	<b>0.1666</b> (0.1862)	<b>0.1329</b> (0.1600)	<b>0.0825</b> (0.0994)	<b>0.0390</b> (0.0486)	<b>0.0175</b> (0.0167)
<b>0.0847</b> (0.0295)	<b>0.0482</b> (0.0459)	<b>0.0502</b> (0.0555)	<b>0.0801</b> (0.0825)	<b>0.1155</b> (0.1086)	<b>0.1548</b> (0.1667)	<b>0.1913</b> (0.2063)	<b>0.1588</b> (0.1763)	<b>0.0812</b> (0.0953)	<b>0.0352</b> (0.0334)
<b>0.0623</b> (0.0192)	<b>0.0335</b> (0.0273)	<b>0.0330</b> (0.0324)	<b>0.0463</b> (0.0546)	<b>0.0690</b> (0.0796)	<b>0.1163</b> (0.1230)	<b>0.1980</b> (0.1931)	<b>0.2259</b> (0.2356)	<b>0.1467</b> (0.1645)	<b>0.0690</b> (0.0706)
<b>0.0334</b> (0.0152)	<b>0.0241</b> (0.0138)	<b>0.0201</b> (0.0202)	<b>0.0300</b> (0.0433)	<b>0.0472</b> (0.0606)	<b>0.0766</b> (0.0892)	<b>0.1439</b> (0.1503)	<b>0.2297</b> (0.2242)	<b>0.2407</b> (0.2351)	<b>0.1543</b> (0.1483)
<b>0.0104</b> (0.0119)	<b>0.0154</b> (0.0122)	<b>0.0140</b> (0.0161)	<b>0.0199</b> (0.0241)	<b>0.0349</b> (0.0324)	<b>0.0587</b> (0.0539)	<b>0.1100</b> (0.1019)	<b>0.1840</b> (0.1536)	<b>0.2666</b> (0.2292)	<b>0.2860</b> (0.3648)

 Überschätzungsfaktoren über 1.25       Unterschätzungsfaktoren unter 0.8

**Tabelle 7-9:** "Wahre" Übergangsmatrix  $P_{\text{wahr}}$  (fettgedruckt) und optimal adjustierte Dynamik  $P_{\text{opt}}$  (in Klammern)

Hierbei stechen zuerst die starken Unterschätzungen der "wahren" Aufstiegsmöglichkeiten aus unteren in höhere bis höchste Einkommensklassen heraus (rechte obere Ecke von Tabelle 7-9). Auch sind die Rückfallwahrscheinlichkeiten aus den Klassen 5 bis 9 in die niedrigste Einkommensklasse in der "wahren" Übergangsdynamik zum Teil drastisch höher. Zudem werden die Verweilwahrscheinlichkeiten in der untersten und der obersten wie auch die Wahrscheinlichkeit eines Abstiegs von der zweiten in die unterste Einkommensklasse in der adjustierten Dynamik deutlich überschätzt. Diese Beobachtungen decken sich mit der deutlich erhöhten Mobilität in der "wahren" Frauendynamik gegenüber der optimal adjustierten Hypothese (vergleiche Tabelle 7-10). Interessant ist auch, dass von den insgesamt 100 Zellen durch den Anpassungsprozess 77 Einträge zum Teil wesentlich näher an die "wahre" Dynamik korrigiert wurden, während 23 Zellen sich davon weiter entfernten. Insgesamt zeigt dies jedoch deutlich auf, dass die Methode der Minimierung der relativen Entropie ein ziemlich effektives Instrument zur Verbesserung einer Hypothese ist, auch wenn diese nicht sonderlich gut gewählt sein sollte. In die adjustierte Dynamik fließt



somit ein guter Teil der über die Randverteilungen eingebrachten Information des wahren dynamischen Einkommensprozesses ein.

Für beide berechneten Hypothesen erfüllen die entsprechenden zweidimensionalen Dichten das in Gleichung (2-8) dargestellte Analogon zum Theorem von Pythagoras. Dies kommt auch in der Csiszár-Projektion in Abbildung 2-4 zum Ausdruck. Dieser Zusammenhang ist in den folgenden beiden Gleichungen dargestellt.

- Hypothese 1:  $D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_{1979}) \cdot P_{\text{mod}}$

$$(7-1) \quad H(D_{\text{wahr}} | D_{\text{mod}}^*) = H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}^*) + H(D_{\text{wahr}} | D_{\text{opt}})$$

$$\Rightarrow 0.05943 = 0.02895 + 0.03048$$

- Hypothese 2:  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu_{1979}) \cdot P_{\text{mod}}$

$$(7-2) \quad H(D_{\text{wahr}} | D_{\text{mod}}) = H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}) + H(D_{\text{wahr}} | D_{\text{opt}})$$

$$\Rightarrow 0.08385 = 0.05337 + 0.03048$$

Ein Vergleich der Gleichungen (7-1) und (7-2) verdeutlicht ebenfalls die Tatsache, dass die optimal angepasste Hypothese  $D_{\text{opt}}$  für beide Fälle identisch ist, da die relative Entropie von  $D_{\text{wahr}}$  hinsichtlich  $D_{\text{opt}}$  beide male denselben Wert annimmt. Der Anpassungsprozess führt in beiden Fällen zu einer wesentlichen Verbesserung der ursprünglichen Hypothese. Die Verbesserung fällt natürlich bei der zweiten Hypothese eindrücklicher aus, da sich diese ja in grösserer Distanz zur Menge  $\bar{\mathbf{D}}$  aller zweidimensionalen Dichten mit den Randverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  befindet. Diese Differenz zwischen den relativen Entropien  $H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}^*)$  und  $H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}})$  ist gemäss Dekomposition (2-15) gegeben durch:

$$\sum_{i=1}^{10} m_{1979,i} \cdot \log \left( \frac{m_{1979,i}}{\mu_{1979,i}} \right).$$

Diese Differenz entspricht genau der relativen Entropie der Anfangsverteilung der Frauen hinsichtlich derjenigen der Männer  $H(m_{1979} | \mu_{1979})$  (vergleiche Abschnitt 2.4). Trotzdem verbleibt noch ein, auch mit den relativen Entropien der ursprünglichen Hypothesen verglichen, grosser Unterschied zwischen "wahrer" und optimal angepasster Dynamik. Dies kann auch als Hinweis dafür gewertet werden, dass die Dy-

namik der Frauen nur ungenügend durch diejenige der Männer geschätzt werden kann. Dies wird auch durch einen Blick auf die Werte der Teststatistik (Gleichungen (2-16) respektive (2-17); die Anzahl  $n$  entspricht hier den 3'386 Männern der Hypothese) in Tabelle 7-10 gestützt. Auf dem 1%-Niveau beträgt der kritische Wert der  $\chi^2$ -Verteilung mit 9 Freiheitsgraden 21.67 (Hypothese 1) und derjenige mit 18 Freiheitsgraden 34.81 (Hypothese 2). Somit müssen beide Hypothesen deutlich verworfen werden. Auch bei Wahl der bestmöglichen hypothetischen zweidimensionalen Dichte  $D_{\text{mod}}^*$  lässt sich die Nullhypothese, dass die Einkommensdynamik der Frauen genügend genau durch diejenige der Männer geschätzt werden kann, nicht aufrechterhalten. Sie ist sogar mit aller Deutlichkeit abzulehnen. Die notwendigen Anpassungen der Männerdynamik an die Randverteilungen der Frauen fallen deshalb hoch signifikant aus.

### 7.3.3.2 Statistik und Mobilitätsmasse

Wie in den vorangegangenen Kapiteln erläutert bedeutet die deutliche Ablehnung der ursprünglichen Hypothesen hingegen nicht, dass sich die für beide Hypothesen identische optimal angepasste Dynamik nicht trotzdem für die Auswertung von Mobilitätsmassen und die Projektion in die Zukunft eignet. Interessant ist hier natürlich ein Vergleich der adjustierten Hypothese mit der üblicherweise unbekanntem "wahren" Dynamik. Die entsprechenden Mobilitätsmasse finden sich in Tabelle 7-10.

Interessant ist zunächst die Feststellung, dass die Mobilität der Männer (hypothetische Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$ ) hinsichtlich aller hier erwähnten Mobilitätsmasse deutlich niedriger ausfällt als diejenigen der Frauen ("wahre" Dynamik  $P_{\text{wahr}}$ ). Durch den Anpassungsprozess wird die Mobilität der in Kapitel 3 erarbeiteten Mobilitätsmasse in die richtige Richtung verschoben. So wird für das Bartholomew-Funktional sowohl die Gleichgewichts- als auch die Periodenmobilität von  $P_{\text{opt}}$  im Vergleich mit  $P_{\text{mod}}$  erhöht und somit in die richtige Richtung angepasst.

<b>Bartholomew's Mobilitätsindex</b> <sup>a</sup>		
hypothetische Übergangsmatrix		1.7917
angepasste Übergangsmatrix		1.8187
"wahre" Übergangsmatrix		2.0807
<b>Periodenmobilitätsindex</b> <sup>a</sup>		
hypothetische Übergangsmatrix		0.2441
angepasste Übergangsmatrix		0.2565
"wahre" Übergangsmatrix		0.3342
<b>Prais' Mobilitätsindex</b> <sup>a</sup>		
hypothetische Übergangsmatrix		0.8651
angepasste Übergangsmatrix		0.8584
"wahre" Übergangsmatrix		0.8873
	<b>1. Hypothese</b>	<b>2. Hypothese</b>
<b>relative Entropie</b>	0.0290	0.0534
<b>Teststatistik</b> (1. Hypothese: $\chi^2(9)$ ; 2. Hypothese: $\chi^2(18)$ ) <sup>b</sup>	196.08	361.41

<sup>a</sup> Die Definitionen dieser Indices finden sich in Tabelle 3-1 und Definition 3-7 in Kapitel 3

<sup>b</sup> Der Test ist auf dem 1%-Niveau signifikant

**Tabelle 7-10:** Mobilitätsmasse der hypothetischen, optimal adjustierten und wahren Dynamik, Teststatistiken der Hypothesen

Dass die angepasste Hypothese jedoch immer noch ziemlich weit von der "wahren" Frauendynamik entfernt ist, wird auch hier manifest. Die Anpassung führt zwar zu einer Annäherung der Werte des in dieser Arbeit propagierten Indexpaars, die Mobilität der "wahren" Frauendynamik ist jedoch trotz dieser Verbesserung immer noch deutlich grösser. Der Verbesserung der Situation beim Bartholomew-Indexpaar steht hingegen eine Verschlechterung beim Prais' Index gegenüber. Hier führt der Anpassungsprozess zu einer Mobilitätsverringern und somit zu einer noch grösseren Mobilitätsdifferenz.

### 7.3.3.3 Projektionen

Wie in den Kapiteln 5 und 6 werden nun die Zukunftsprognosen der angepassten Dynamik  $P_{opt}$  aufgestellt und jenen der "wahren" Übergangsdynamik  $P_{wahr}$  gegenübergestellt. In Tabelle 7-11 finden sich die Projektionen der Verteilung  $m_{1989}$  zehn Jahre in die Zukunft ( $m_{1999}$ ) sowie die implizierten Gleichgewichtsverteilungen  $\pi$ , welche die langfristige Entwicklung der Einkommensverteilung der Frauen ceteris paribus abschätzen.

Einkommens- klasse	Beobachtungen		projizierte Verteilungen			
			angepasste Hypothesen		wahre Dynamik	
	$m_{1979}$	$m_{1989}$	$m_{1999}$	$\pi$	$m_{1999}$	$\pi$
1	14.87	13.72	14.82	16.27	14.12	14.53
2	5.16	9.77	10.46	11.07	10.39	10.78
3	8.76	8.79	9.12	9.49	9.25	9.56
4	9.65	10.18	10.33	10.55	10.31	10.50
5	10.80	10.95	10.79	10.81	10.83	10.89
6	13.16	11.86	11.35	11.07	11.58	11.51
7	13.87	12.01	11.35	10.76	11.50	11.20
8	12.30	10.86	10.24	9.49	10.39	9.98
9	7.49	7.49	7.17	6.53	7.28	6.93
10	3.92	4.37	4.37	3.96	4.34	4.12
$A_{\varepsilon=0.5}$	0.126	0.135	0.140	0.142	0.138	0.139
$GE_{\alpha=2}$	0.265	0.297	0.313	0.329	0.308	0.314

$m_{1999}$  projizierte Einkommensverteilung 1999 basierend auf der entsprechenden Übergangsmatrix und der Anfangsverteilung  $m_{1989}$

$\pi$  Gleichgewichtsverteilung der jeweiligen Übergangsmatrix

$A_{\varepsilon=0.5}$  Atkinson's Ungleichheitsindex mit  $\varepsilon = 0.5$

$GE_{\alpha=2}$  Verallgemeinerter Entropieindex mit  $\alpha = 2$

**Tabelle 7-11:** Vergleich der Projektionen von angepasster und wahrer Dynamik

Wie beim Vergleich der adjustierten theoretischen Hypothesen (Kapitel 6) mit dem plausibleren angepassten PSID-Modell (Kapitel 5) zeigt sich auch hier ein ähnliches Bild zwischen der optimal adjustierten Hypothese und der a priori plausibleren "wahren" Dynamik. Die qualitativen Aussagen decken sich in beiden Fällen gut. So deuten die beiden Ungleichheitsmasse für beide Fälle darauf hin, dass sich der beobachtete Trend in der Entwicklung der Ungleichheit bei den Frauen fortsetzen wird. Beide Masse sagen, sowohl kurz- wie auch langfristig, eine weitere Zunahme der Ungleichheit voraus. Dies entspricht den Prognosen für die Gesamtpopulation (vergleiche Kapitel 5 respektive 6). Die Entwicklung fällt hier bei der adjustierten Hypothese  $P_{opt}$  prononcierter aus als bei  $P_{wahr}$ .

Die Zunahme der Ungleichheit wird aufgrund der angepassten Hypothese mit der folgenden Entwicklung begründet. Kurzfristig wird, verglichen mit 1989, eine Zunahme in den untersten vier sowie eine Reduktion in den Einkommensklassen 5 bis 9 erwartet. Die oberste Klasse bleibt kurzfristig unverändert. Verglichen mit der Prognose für das Jahr 1999 legen die untersten fünf Klassen langfristig weiterhin zu, während der Abbau nun die gesamte obere Hälfte der Einkommensverteilung betrifft.

Bei der "wahren" Dynamik ist der Verlauf ähnlich, jedoch weniger dramatisch. So kommt es hier kurzfristig ebenfalls zu einer Zunahme in den untersten vier Klassen, der Abbau betrifft hier schon alle sechs höchsten Einkommensklassen. Langfristig zeigt sich wiederum das Bild einer weiteren Zunahme in der unteren Hälfte der Einkommensverteilung während die oberen fünf Klassen weiter abnehmen. Vor allem die Zunahme in den untersten Einkommensklassen wie auch die Reduktion in der höchsten Klasse sind deutlich weniger ausgeprägt als beim optimal angepassten Modell.

#### **7.4 SCHLUSSFOLGERUNGEN**

In diesem Kapitel wurde die Methode der Minimierung der relativen Entropie aus Kapitel 2 auf die Fragestellung angewandt, ob die Einkommensdynamik der Frauen der USA für die Dekade 1979 bis 1989 genügend genau durch diejenige der US-Männer erklärt wird. Um ökonomisches Wachstum sowie Unterschiede zwischen den Geschlechtern im Einkommensniveau auszuschliessen, wurden die verwendeten Daten aus dem PSID-Panel der Jahre 1979 und 1989 für beide Geschlechter und beide Jahre auf denselben Mittelwert korrigiert. Der Analogie mit den Beispielen der Kapitel 5 und 6 folgend wurden alle Daten auf den Mittelwert der 1989'er CPS-Daten von Burkhauser et. al. (1999) korrigiert. Somit wurden hier bloss Unterschiede in der reinen Dynamik der Einkommensverteilung zwischen den Geschlechtern untersucht. Die Hypothese, die Einkommensdynamik der Frauen könnte durch jene der Männer ausreichend genau beschrieben werden, musste in aller Deutlichkeit abgelehnt werden. Da der verwendete PSID-Datensatz mehr Information als benötigt enthält, konnte die Dynamik der Frauen auch direkt geschätzt werden. Dies erlaubte es, einen direkten Vergleich zwischen adjustierter Hypothese und "wahrer" Dynamik anzustellen und so auch zu demonstrieren, dass die Anpassungen das Modell eindeutig in die richtige Richtung verbesserten. Damit wurde deutlich gemacht, dass sich die Methode ohne weiteres bei Untersuchungen einsetzen lässt, wo die zusätzliche Information zur Bestimmung der "wahren" Dynamik nicht vorhanden ist.

Zusammengefasst kann das Fazit gezogen werden, dass das angepasste Modell qualitativ dieselben Schlüsse zulässt wie die "wahre" Dynamik. So wird kurz- wie

langfristig eine weitere Zunahme der Ungleichheit bei den Frauen der USA vorausgesagt. Der Trend bei der Gesamtpopulation der USA (Kapitel 5) bestätigt sich also bei der Teilpopulation der Frauen. Da es sich auch hier um relative Vergleiche handelt gilt, dass durch diese Feststellung nicht ausgeschlossen wird, dass ökonomisches Wachstum trotz zunehmender Ungleichheit alle Frauen besser stellen könnte. Bei Mobilitätsvergleichen der adjustierten Hypothese mit der ursprünglichen Hypothese (Männerdynamik  $P_{mod}$ ) zeigt sich für das in Kapitel 3 entwickelte Bartholomew-Indexpaar dasselbe Bild wie beim direkten Vergleich der Frauen- mit der Männerdynamik. Sowohl die Gleichgewichts- als auch die Periodenmobilität sind in der adjustierten Übergangsdynamik  $P_{opt}$  höher als in der Einkommensdynamik der Männer. Der Unterschied zu den Männern fällt allerdings weniger deutlich aus als beim direkten Vergleich von Frauen und Männern. Die Frauen zeigen in der Periode 1979 bis 1989 eine deutlich höhere soziale Mobilität als die Männer. Die Gründe dafür müssten allerdings näher ausgeleuchtet werden. Zum Teil trägt sicher die Tatsache dazu bei, dass Teilzeitarbeit und somit eine Erhöhung wie auch eine Verringerung des Beschäftigungsgrades bei Frauen wesentlich häufiger anzutreffen ist als bei Männern, welche vermehrt Vollzeitstellen besetzen.

## 8 MONTE CARLO SIMULATION

### 8.1 EINLEITUNG

Um die Effektivität der Methode der Minimierung der relativen Entropie bei der Adjustierung von Hypothesen der Einkommensdynamik an beobachtete Randverteilungen zu demonstrieren und so diese Methode zusätzlich zu stützen, wird in diesem Kapitel eine Monte Carlo Simulationsstudie durchgeführt. Für diese Simulation wird die in Kapitel 5 geschätzte, optimal an die beobachteten Einkommensverteilungen angepasste Übergangsdynamik der USA als wahrer Einkommensprozess postuliert. Zudem werden die in Tabelle 5-4 dargestellten Einkommensverteilungen für die Jahre 1979 und 1989 sowie für den Gleichgewichtszustand als wahr und bekannt vorausgesetzt.

Gemäss diesen Vorgaben werden dann, mittels Zufallszahlengenerator, diverse Zufallsstichproben für die Dekade 1979 bis 1989 simuliert. Aus diesen Stichproben wird je eine Anfangshypothese der Übergangsdynamik geschätzt. Diese Hypothesen, welche bei konventionellem Vorgehen das Endresultat darstellen, werden durch Minimierung der relativen Entropie an die postulierten wahren Einkommensverteilungen angepasst. Die jeweils ursprünglichen und optimal adjustierten Hypothesen können dann mit der wahren Dynamik verglichen werden. Auf diese Weise lässt sich die Effizienz dieser Methodik gut demonstrieren.

Mittels der optimal adjustierten Übergangsdynamik aus Kapitel 5 sowie der zugehörigen Gleichgewichtsverteilung werden mehrere Zufallsstichproben unterschiedlichen Umfangs simuliert, welche das System in seinem Gleichgewicht repräsentieren. Anhand dieser Stichproben wird demonstriert, wie sich die in Kapitel 3 postulierten Gleichgewichtsindices, ohne vorgängige Schätzung einer Übergangsmatrix, direkt aus den Stichprobendaten schätzen lassen. Es wird gezeigt, wie diese Schätzung, mit steigendem Stichprobenumfang, immer besser gegen die wahre Mobilität konvergiert. Diese empirische Stichprobenmobilität wird auch für die Stichproben der Dekade 79 bis 89, in welcher sich das System nicht in seinem Gleichgewichtszustand befindet, bestimmt. Es wird demonstriert, dass sich die empirischen Stichprobenmobilitäten von Stichproben, welche nicht den Gleichgewichtszustand repräsen-

tieren, systematisch vom wahren Gleichgewichtsindex unterscheiden und gegen den Wert konvergieren, der aus der Auswertung des entsprechenden Mobilitätsfunktions bei der wahren Anfangsverteilung der untersuchten Periode und nicht bei der Gleichgewichtsverteilung resultiert.

Danach wird gezeigt, dass Datenpanels, welche nicht den Gleichgewichtszustand widerspiegeln, eine Art implizite Periodenmobilität beinhalten. Der Schwellenwert zur Bestimmung der impliziten Periodenmobilität ist gerade durch das Niveau der in diesen Panels vorhandenen empirischen Stichprobenmobilität gegeben. Anhand der Stichproben der Dekade 1979 bis 1989 wird demonstriert, wie die implizite Periodenmobilität zu berechnen ist und wie sie interpretiert werden kann.

Es wird auch demonstriert, wie sich die Methode der Minimierung der relativen Entropie zur Anpassung von Stichprobendynamiken an beobachtete Einkommensquerschnitte auf die Bestimmung der Gleichgewichts-, der empirischen Stichproben- und der impliziten Periodenmobilität auswirkt. So lässt sich die Effizienz der Anpassungsmethode zusätzlich evaluieren.

## **8.2 WAHRE EINKOMMENDYNAMIK UND SIMULIERTE STICHPROBEN**

### **8.2.1 Die wahre Dynamik**

Um die Monte Carlo Simulation möglichst realitätsnah zu gestalten, wird hier auf die empirischen Daten für die USA aus Kapitel 5 zurückgegriffen. Als wahre Einkommensdynamik  $P_{\text{wahr}}$  wird die optimal adjustierte PSID-Hypothese aus Tabelle 5-2 postuliert. Zudem werden die in Tabelle 5-4 dargestellten Einkommensverteilungen  $m_{1979}$ ,  $m_{1989}$  und die gleichgewichtige Verteilung  $\pi$  als wahr und bekannt vorausgesetzt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die postulierte Einkommensdynamik sowie die beobachteten Einkommensverteilungen in Tabelle 8-1 respektive Tabelle 8-2 nochmals dargestellt.



		Einkommensklasse 1989									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1979	1	0.2853	0.1015	0.1070	0.1231	0.1284	0.1087	0.0797	0.0410	0.0175	0.0078
	2	0.2923	0.1417	0.1238	0.1055	0.1141	0.1005	0.0660	0.0360	0.0141	0.0059
	3	0.2040	0.1264	0.1402	0.1389	0.1508	0.1154	0.0665	0.0361	0.0152	0.0066
	4	0.1501	0.0925	0.1348	0.1675	0.1767	0.1335	0.0794	0.0408	0.0167	0.0079
	5	0.0991	0.0649	0.1053	0.1506	0.1844	0.1802	0.1196	0.0603	0.0253	0.0103
	6	0.0604	0.0396	0.0675	0.1080	0.1701	0.2250	0.1816	0.0945	0.0384	0.0150
	7	0.0342	0.0231	0.0426	0.0728	0.1332	0.2116	0.2257	0.1551	0.0697	0.0319
	8	0.0158	0.0131	0.0281	0.0514	0.0960	0.1575	0.2172	0.2185	0.1318	0.0707
	9	0.0089	0.0076	0.0184	0.0352	0.0695	0.1214	0.1784	0.2292	0.1937	0.1377
	10	0.0063	0.0050	0.0096	0.0211	0.0498	0.0861	0.1217	0.1746	0.1888	0.3370

Tabelle 8-1: Wahre Übergangsdynamik  $P_{\text{wahr}}$ 

Einkommens- klassen	wahre Verteilungen		
	Dekade 1979 bis 1989		Gleichgewicht $\pi$
	$m_{1979}$	$m_{1989}$	
$(-\infty, 5'790 ]$	8.23	10.14	11.32
$(5'790, 7'762 ]$	4.81	5.64	6.08
$(7'762, 10'407 ]$	7.13	7.82	8.11
$(10'407, 13'954 ]$	10.27	10.50	10.60
$(13'954, 18'708 ]$	14.73	14.19	13.99
$(18'708, 25'083 ]$	18.23	16.63	15.93
$(25'083, 33'630 ]$	16.89	14.97	14.15
$(33'630, 45'090 ]$	11.71	10.67	10.17
$(45'090, 60'454 ]$	5.46	5.82	5.73
$(60'454, \infty )$	2.54	3.62	3.93
$A_{\varepsilon=0.5}$	0.094	0.108	0.114
$GE_{\alpha=2}$	0.199	0.235	0.252

$A_{\varepsilon=0.5}$  Atkinson's Ungleichheitsindex mit  $\varepsilon = 0.5$

$GE_{\alpha=2}$  Verallgemeinerter Entropieindex mit  $\alpha = 2$

Tabelle 8-2: Beobachtete wahre Einkommensverteilungen

## 8.2.2 Die Stichproben

Für die Dekade 1979 bis 1989 sowie für den Gleichgewichtszustand wurden je 1'000 Stichproben der Stichprobenumfänge 500, 1'000, 2'000, 4'000, 8'000 und 16'000 generiert. Dabei wurden die jeweils  $n$  Individuen mittels Zufallszahlengenerator anhand der entsprechenden wahren zweidimensionalen Dichtematrix  $D_{\text{wahr}}$  ihren jewei-

ligen Einkommensklassen zugeordnet.<sup>95</sup> Ein Satz von  $n$  Zufallszahlen diene dabei für die Erzeugung je einer Stichprobe des Umfangs  $n$  der Dekade 79 bis 89 sowie des gleichgewichtigen Zustands. Für die Dekade 1979 bis 1989 wird die wahre zweidimensionale Dichte gemäss  $D_{\text{wahr}} = \text{diag}(m_{1979}) \cdot P_{\text{wahr}}$  generiert, für den Gleichgewichtszustand gemäss  $D_{\text{wahr}} = \text{diag}(\pi) \cdot P_{\text{wahr}}$ . Anhand der Stichproben der Dekade 1979 bis 1989 wird im folgenden die Effizienz der Methode der Minimierung der relativen Entropie aus Kapitel 2 demonstriert (Abschnitt 8.3). Für die anschliessende Mobilitätsanalyse anhand der in Kapitel 3 erarbeiteten Theorie werden dann, neben den Stichproben der Periode 79 bis 89, auch die gleichgewichtigen Stichproben verwendet (Abschnitt 8.4).

### 8.3 ANPASSUNG DER HYPOTHESEN AN DIE RANDVERTEILUNGEN

#### 8.3.1 Hypothetische und optimal angepasste Dynamiken

Für alle 1'000 Stichproben des Umfangs  $n$  (mit  $n \in \{500, 1'000, 2'000, 4'000, 8'000, 16'000\}$ ) wurden die korrespondierenden hypothetischen Übergangsmatrizen  $P_{\text{mod}}$  bestimmt. Aus diesen Hypothesen wurde jeweils die bestmögliche hypothetische zweidimensionale Dichtematrix

$$D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_{1979}) \cdot P_{\text{mod}}$$

erstellt (vergleiche Abschnitt 2.4). Diese hypothetischen Dichtematrizen wurden dann mittels der Methode der Minimierung der relativen Entropie an die als beobachtet vorausgesetzten wahren Einkommensverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  (Tabelle 8-2) angepasst. Für jede Stichprobe resultiert somit eine ursprüngliche ( $P_{\text{mod}}$  respektive  $D_{\text{mod}}^*$ ) und eine optimal angepasste Hypothese ( $P_{\text{opt}}$  respektive  $D_{\text{opt}}$ ) über den dynamischen Prozess der Einkommensverteilung.

---

<sup>95</sup> Die Stichproben wurden in Matlab simuliert. Der Zufallszahlengenerator von Matlab kann maximal  $2^{1492}$  Zahlen generieren, bevor er sich zu wiederholen beginnt. In Zehnerpotenzen ausgedrückt beträgt die mögliche Schleifenlänge ungefähr  $10^{449}$ . Es besteht somit auch bei den 1'000 simulierten Stichproben des grössten Umfangs von 16'000 Individuen keine Gefahr der Wiederholung.

Da hier alle Hypothesen aus Stichproben generiert wurden, kann für jedes Modell geprüft werden, ob die notwendigen Anpassungen an die beobachteten Randverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  in einem statistischen Sinne signifikant waren. Gemäss (2-17) ist die Teststatistik

$$2 \cdot n \cdot H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}^*) \sim \chi_{K-1}^2$$

hier  $\chi^2$ -verteilt mit 9 Freiheitsgraden. Für alle Stichproben lassen sich somit die relative Entropie zwischen ursprünglicher und optimal adjustierter Hypothese wie auch die zugehörige  $\chi^2$ -Teststatistik berechnen. Für alle Stichprobenumfänge sind die Mittelwerte ( $\bar{x}$ ) sowie die Standardabweichungen ( $s_x$ ) für die je 1'000 resultierenden Werte von  $H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}^*)$  sowie der  $\chi^2$ -Statistik in Tabelle 8-3 dargestellt. Zudem sind dort auch die Anderson-Darling Teststatistiken (AD) enthalten. Der Anderson-Darling Test ist ein sogenannt verteilungsfreier Anpassungstest. Damit lässt sich zum Beispiel testen, ob sich für die je 1'000 Werte der  $\chi^2$ -Statistiken die Hypothese aufrechterhalten lässt, dass sie  $\chi^2$ -verteilt mit 9 Freiheitsgraden sind.<sup>96</sup>

Auf dem 5%-Signifikanzniveau beträgt der kritische Wert des Anderson-Darling Tests 2.492. Für Werte der Teststatistik  $AD > 2.492$  kann die Nullhypothese, die Daten seien  $\chi^2$ -verteilt mit 9 Freiheitsgraden, nicht mehr aufrechterhalten werden. Aus Tabelle 8-3 ist ersichtlich, dass die Nullhypothese auf dem 5%-Niveau bloss für den Stichprobenumfang 500 (in Tabelle 8-3 grau unterlegt) nicht aufrecht erhalten werden kann (bei einem Signifikanzniveau von 1% könnte die Nullhypothese auch hier nicht mehr verworfen werden). Für alle anderen Stichprobenumfänge lässt sich die  $\chi^2$ -Statistik somit problemlos anwenden.

---

<sup>96</sup> Näheres zu diesem Test findet sich in Anderson und Darling (1954) und in Stephens (1986 a). Bei Stephens ist eine ausführlichere Tabelle der Signifikanzniveaus dieses Tests (S. 105) sowie eine Diskussion über die Familie der auf der empirischen Verteilungsfunktion beruhenden Anpassungstests enthalten, zu denen auch der Anderson-Darling Test gehört. Die Signifikanzniveaus für diesen Test sind für alle Stichprobenumfänge  $n \geq 5$  identisch. Tests, welche die gesamte Verteilung berücksichtigen, werden auch Omnibus-Tests genannt. Unter den Omnibus-Tests gehört der Anderson-Darling Test zu den besten.

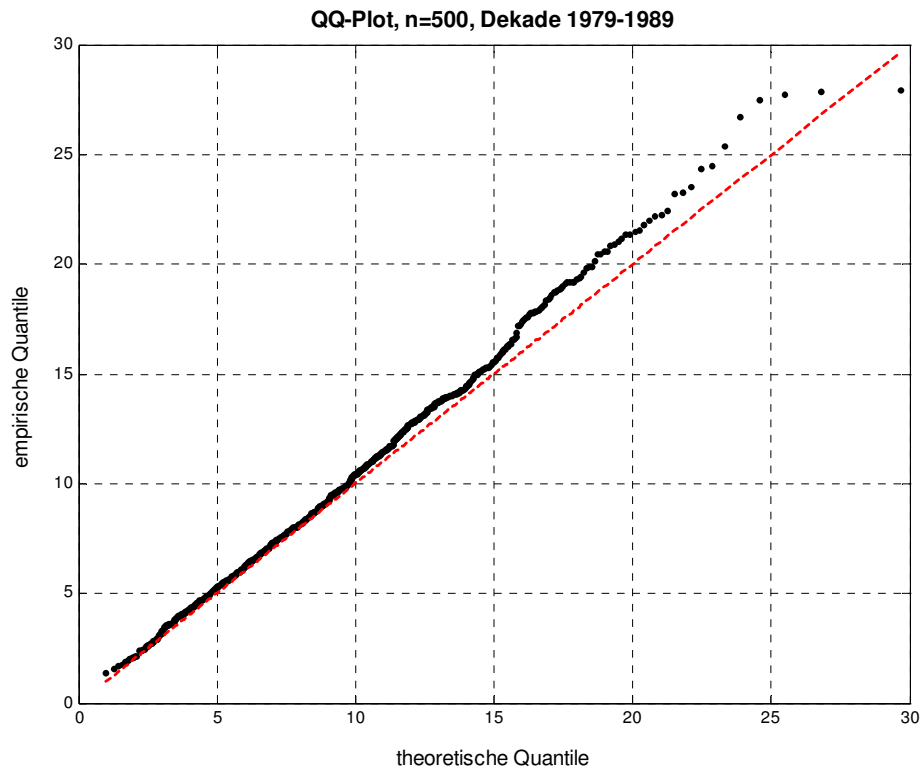
	n	$H(D_{opt}   D_{mod}^*)$	$\chi^2(9)$ -Test
			$2 \cdot n \cdot H(D_{opt}   D_{mod}^*)$
Stichproben	500	$\bar{x}$	9.41
		$s_x$	(4.52)
		AD	<i>3.7415</i>
	1'000	$\bar{x}$	9.17
		$s_x$	(4.43)
		AD	<i>0.8650</i>
	2'000	$\bar{x}$	9.11
		$s_x$	(4.40)
		AD	<i>0.6423</i>
	4'000	$\bar{x}$	9.05
		$s_x$	(4.21)
		AD	<i>0.2965</i>
	8'000	$\bar{x}$	8.95
		$s_x$	(4.25)
		AD	<i>0.5494</i>
	16'000	$\bar{x}$	8.99
		$s_x$	(4.29)
		AD	<i>0.3919</i>

**Tabelle 8-3:** Relative Entropien und  $\chi^2$ -Test der Stichproben (Mittelwerte und Standardabweichungen (in Klammern) aus je 1'000 Stichproben sowie Anderson-Darling Teststatistik auf  $\chi^2$ -Verteilung mit 9 Freiheitsgraden (kursiv))

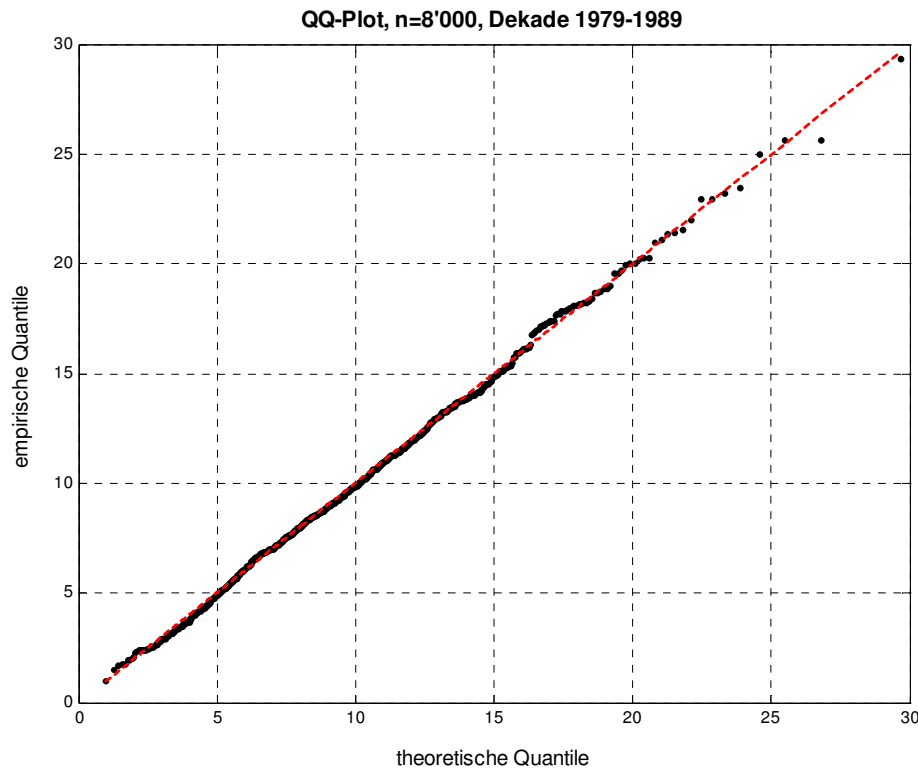
Ein Anpassungstest sollte jedoch nicht ohne qualitative Beurteilung des zugehörigen Quantil-Quantil-Diagramms erfolgen.<sup>97</sup> Die Quantil-Quantil-Diagramme für die je 1'000 Werte der  $\chi^2$ -Statistik bestätigen hier die Anderson-Darling Teststatistik für alle Stichprobenumfänge. Stellvertretend werden hier die Quantil-Quantil Diagramme für die Stichprobenumfänge 500 (Ablehnung der Nullhypothese durch Anderson-Darling) und 8'000 (Nullhypothese wird durch Anderson-Darling nicht verworfen) in den Abbildungen 8-1 und 8-2 dargestellt. Während die empirischen Quantile für  $n = 500$  stark

<sup>97</sup> In Quantil-Quantil-Diagrammen (QQ-Plots) werden die empirischen Quantile (diese stammen hier aus den je 1'000 Werten der entsprechenden  $\chi^2$ -Statistik) den theoretischen Quantilen (entstammen hier der  $\chi^2$ -Verteilung mit 9 Freiheitsgraden) gegenüber gestellt. Je mehr die empirischen Quantile von der 45°-Geraden abweichen, desto unwahrscheinlicher ist die theoretische Verteilung als Modell für die empirische Verteilung. Die hier dargestellten Quantil-Quantil-Diagramme wurden gemäss den Ausführungen in Stahel (1995) erstellt (S. 233ff).

von den durch die 45°-Gerade symbolisierten theoretischen Quantilen abweichen (Abbildung 8-1), passen sie sich für  $n = 8'000$  sehr gut an (Abbildung 8-2).



**Abbildung 8-1:** Quantil-Quantil-Diagramm der 1'000 Werte der  $\chi^2$ -Statistik des Stichprobenumfangs 500



**Abbildung 8-2:** Quantil-Quantil-Diagramm der 1'000 Werte der  $\chi^2$ -Statistik des Stichprobenumfangs 8'000

Die  $\chi^2$ -Statistiken aus Tabelle 8-3 können also problemlos für alle Stichprobenumfänge mit Ausnahme von  $n = 500$  ausgewertet werden. Auf dem 5%-Niveau beträgt der kritische Wert der  $\chi^2$ -Verteilung mit 9 Freiheitsgraden 16.92. Für die Stichprobenumfänge oberhalb  $n = 500$  fallen somit die notwendigen Anpassungen der Hypothesen an die beobachteten Randverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  auf diesem Signifikanzniveau im Durchschnitt nicht signifikant aus. Im Gegensatz zum empirischen Beispiel aus Kapitel 5, wo die notwendigen Adjustierungen der PSID-Hypothese signifikant ausfielen, zeigt sich in dieser Simulation deutlich, dass die Gesetzmässigkeit der grossen Zahlen bei perfekten Zufallsprozessen sehr schnell zum Tragen kommt. Bei solchen Prozessen wird die Wahrscheinlichkeit, eine schlechte Stichprobe zu ziehen, sofort sehr klein.

### 8.3.2 Vergleiche mit der wahren Dynamik

Da hier die wahre Dynamik bekannt ist, ist ein Vergleich der ursprünglichen wie auch der optimal angepassten Hypothesen mit der wahren Übergangsdynamik möglich. Gemäss Gleichung (2-8) herrscht zwischen den relativen Entropien der involvierten Dynamiken der folgende pythagoräische Zusammenhang (vergleiche auch Abbildung 2-4):

$$H(D_{\text{wahr}} | D_{\text{mod}}^*) = H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}^*) + H(D_{\text{wahr}} | D_{\text{opt}}) .$$

Sinnvoll ist die Berechnung dieses Zusammenhangs nur dann, wenn in  $H(D_1|D_2)$  das Argument  $D_1$  absolut stetig zur Bezugsmatrix  $D_2$  ist.<sup>98</sup> Für die ursprüngliche und die optimal angepasste Dynamik ist dies immer gegeben. Die wahre Dynamik ist jedoch eine positive Matrix und solche Matrizen sind nur zu Matrizen absolut stetig, welche auch keine Nullelemente enthalten. Die Berechnung des pythagoräischen Zusammenhangs ist somit nur dann sinnvoll, wenn die betrachtete Hypothese  $D_{\text{mod}}^*$  und somit auch die korrespondierende optimal adjustierte Dynamik  $D_{\text{opt}}$  positiv sind.<sup>99</sup>

---

<sup>98</sup>  $D_1$  ist absolut stetig hinsichtlich  $D_2$  wenn  $d_{2,ij} = 0$  impliziert, dass auch  $d_{1,ij} = 0$ . Ist dies nicht gegeben, dann wird die relative Entropie  $H(D_1|D_2)$  unendlich gross (vergleiche Gleichung (2-6)).

<sup>99</sup> Werden die Hypothesen aus den Stichprobendaten mittels zweidimensionaler Kerndichteschätzung generiert, resultieren positive hypothetische Dynamiken. Das Problem von Nullelementen in aus Stichproben generierten Hypothesen lässt sich somit durch den "Glättungseffekt" der Kerndichteschätzung beheben. Für alle Stichprobenumfänge sollten deshalb ursprünglich die hypothetischen Dynamiken derjenigen Stichproben, welche bei direkter Berechnung Nullelemente in den Hypothesen generieren, nicht direkt sondern mittels zweidimensionaler Kerndichteschätzung errechnet werden. In einem früheren Stadium dieser Arbeit generierten 133 von 500 Stichproben des Stichprobenumfangs 16'000 bei direkter Bestimmung der hypothetischen Dynamiken Nullelemente in den entsprechenden Matrizen. Für diese 133 Stichproben wurden damals die Hypothesen mittels zweidimensionaler Kerndichteschätzung bestimmt, die restlichen 367 Hypothesen wurden direkt aus den Stichprobendaten erstellt. Diese Kerndichteschätzungen zogen sich auf den universitären Grossrechnern über ca. 4 Monate hin. Deshalb wurde hier darauf verzichtet. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass die damals ermittelten Werte bei den Kerndichteschätzungen sehr gut mit denjenigen korrespondierten, die aus den 367 positiven, direkt ermittelten Hypothesen berechnet wurden.

Werden die hypothetischen Dynamiken direkt aus den gezogenen Stichproben berechnet, so ist nicht sichergestellt, dass diese positiv sind. Die Wahrscheinlichkeit von Nullelementen in der hypothetischen und somit auch in der optimal adjustierten Dichte steigt natürlich mit sinkendem Stichprobenumfang. Auch bei grossen Stichprobenumfängen können einzelne Stichproben durchaus Hypothesen mit Nullelementen generieren. Für die aus je 1'000 Stichproben erstellten Hypothesen ergibt sich das folgende Bild:

	n	Hypothesen	
		positive	mit Nullelementen
Stichproben	500	0	1'000
	1'000	0	1'000
	2'000	0	1'000
	4'000	46	954
	8'000	330	670
	16'000	779	221

**Tabelle 8-4:** Anzahl positive Hypothesen

Es zeigt sich, dass nur für die grösseren Stichprobenumfänge (4'000, 8'000 und 16'000) zum Teil positive Hypothesen generiert werden. In Tabelle 8-5 sind die Mittelwerte und die Standardabweichungen der berechneten relativen Entropien aller positiven Hypothesen dargestellt.

	n	Relative Entropien			$\chi^2(9)$ -Test	
		$H(D_{opt}   D_{mod}^*)$	$H(D_{wahr}   D_{opt})$	$H(D_{wahr}   D_{mod}^*)$	$2 \cdot n \cdot H(D_{opt}   D_{mod}^*)$	
Stichproben	4'000 46 Stichproben	$\bar{x}$	0.001195	0.010610	0.011805	9.56
		$s_x$	(0.000513)	(0.001895)	(0.002024)	(4.10)
		<i>AD</i>				<i>0.8822</i>
	8'000 330 Stichproben	$\bar{x}$	0.000567	0.005099	0.005665	9.07
		$s_x$	(0.000265)	(0.000823)	(0.000867)	(4.24)
		<i>AD</i>				<i>1.1482</i>
	16'000 779 Stichproben	$\bar{x}$	0.000281	0.002568	0.002850	9.01
		$s_x$	(0.000135)	(0.000400)	(0.000424)	(4.31)
		<i>AD</i>				<i>0.3231</i>

**Tabelle 8-5:** Relative Entropien zwischen Hypothesen, optimal angepassten Dynamiken und wahrer Dynamik. Nur positive Hypothesen und daraus berechnete optimal angepasste Dynamiken werden berücksichtigt. Mittelwerte und Standardabweichungen (in Klammern) sowie Anderson-Darling Teststatistik auf  $\chi^2$ -Verteilung mit 9 Freiheitsgraden (kursiv).



Es zeigt sich, dass die Mittelwerte der relativen Entropien sowie die zugehörigen Standardabweichungen mit zunehmendem Stichprobenumfang abnehmen. Dies bedeutet, dass, mit steigendem Stichprobenumfang, die hypothetische Dynamik  $D_{\text{mod}}^*$  im Sinne der relativen Entropie tendenziell immer näher an die wahre Einkommensdynamik  $D_{\text{wahr}}$  zu liegen kommt. Dieses Verhalten ist eine Folge des Gesetzes der grossen Zahlen und somit zu erwarten. Da die optimal adjustierte Dynamik  $D_{\text{opt}}$  jedoch immer näher bei  $D_{\text{wahr}}$  liegt als die entsprechende Modelldynamik, ist sie für weitergehende Betrachtungen zum dynamischen Einkommensprozess immer der bestmögliche Ausgangspunkt. Für alle betrachteten Stichprobenumfänge ist hier die Anderson-Darling Teststatistik deutlich unter dem 5%-Signifikanzniveau von 2.492. Die entsprechenden Quantil-Quantil-Diagramme bestätigen die Anderson-Darling Teststatistiken. Somit lässt sich die  $\chi^2$ -Statistik für alle betrachteten Fälle auswerten. Gemäss der  $\chi^2$ -Teststatistik mit 9 Freiheitsgraden erweisen sich die notwendigen Anpassungen an die beobachteten wahren Einkommensverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  auf dem 5%-Signifikanzniveau (kritischer Wert: 16.92) durchschnittlich als nicht signifikant.

#### 8.4 MESSUNG DER MOBILITÄT

Zunächst wird hier die gleichgewichtige Mobilität auf konventionelle Weise direkt aus den entsprechenden hypothetischen und optimal angepassten Übergangsmatrizen ausgewertet. Es wird gezeigt, dass die mittels der Methode der Minimierung der relativen Entropie an die beobachteten wahren Einkommensverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  angepassten Dynamiken zumindest tendenziell bessere Mobilitätsschätzungen liefern, als die ursprünglichen, direkt aus den Stichproben ermittelten Hypothesen. Auch wird die nach dem Gesetz der grossen Zahlen zu erwartende, mit steigendem Stichprobenumfang verbesserte Schätzung der Mobilitätsindices demonstriert.

Danach wird aufgezeigt, wie sich die Mobilität auch direkt als empirische Mobilität aus einem Datenpanel bestimmen lässt, ohne dass vorher die Übergangsdynamik geschätzt werden muss. Bei gleichgewichtigen Panels entspricht dies einer Schätzung des entsprechenden wahren Gleichgewichtsindex. Zudem wird in einer Kombi-

nation der in einem Panel vorhandenen empirischen Mobilität mit der Gleichgewichtsmobilität der daraus geschätzten Übergangsmatrix demonstriert, dass ein nicht gleichgewichtiges Datenpanel immer auch eine implizite Periodenmobilität beinhaltet, welche einen Hinweis darauf liefert, wie weit entfernt von ihrem Gleichgewichtszustand sich eine Ökonomie befindet.

#### 8.4.1 Gleichgewichtsindices der Übergangsdynamiken

Für alle betrachteten Stichprobenumfänge finden sich in Tabelle 8-6 die Mittelwerte ( $\bar{x}$ ) aller in Kapitel 3 vorgestellten Gleichgewichtsindices für die je 1'000 Stichproben der Dekade 1979 bis 1989 sowie die zugehörigen Standardabweichungen dieser Mittelwerte ( $s_{\bar{x}}$ ). Diese Werte wurden sowohl für die hypothetischen wie auch für die optimal adjustierten Übergangsmatrizen berechnet.

		Stichproben						
		500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000	
$P_{mod}$	Bartholomew $ i-j $	$\bar{x}$	1.8115	1.8181	1.8230	1.8242	1.8250	1.8253
		$s_{\bar{x}}$	(0.002537)	(0.001695)	(0.001208)	(0.000848)	(0.000594)	(0.000422)
		SF	0.9986	0.9994	0.9994	0.9993	0.9989	0.9988
	Quadrierte Distanz $(i-j)^2$	$\bar{x}$	5.9082	5.9393	5.9637	5.9716	5.9737	5.9751
		$s_{\bar{x}}$	(0.015155)	(0.010064)	(0.007379)	(0.005225)	(0.003571)	(0.002545)
		SF	0.9985	0.9989	0.9996	0.9991	0.9996	0.9994
	Klassenwechsel $(1-\delta_{ij})$	$\bar{x}$	0.7862	0.7875	0.7891	0.7891	0.7894	0.7896
		$s_{\bar{x}}$	(0.000670)	(0.000446)	(0.000299)	(0.000214)	(0.000150)	(0.000108)
		SF	0.9897	0.9985	0.9983	0.9990	0.9989	0.9995
$P_{opt}$	Bartholomew $ i-j $	$\bar{x}$	1.8218	1.8228	1.8256	1.8249	1.8256	1.8255
		$s_{\bar{x}}$	(0.002323)	(0.001593)	(0.001122)	(0.000802)	(0.000568)	(0.000398)
		SF	0.9995	0.9996	0.9993	0.9994	0.9989	0.9989
	Quadrierte Distanz $(i-j)^2$	$\bar{x}$	5.9459	5.9574	5.9716	5.9732	5.9766	5.9752
		$s_{\bar{x}}$	(0.013583)	(0.009208)	(0.006640)	(0.004745)	(0.003350)	(0.002316)
		SF	0.9995	0.9991	0.9991	0.9990	0.9996	0.9987
	Klassenwechsel $(1-\delta_{ij})$	$\bar{x}$	0.7899	0.7891	0.7901	0.7895	0.7896	0.7897
		$s_{\bar{x}}$	(0.000611)	(0.000432)	(0.000287)	(0.000207)	(0.000146)	(0.000107)
		SF	0.9991	0.9988	0.9983	0.9992	0.9997	0.9993
		<b>Wahre Dynamik</b>						
$P_{wahr}$	Bartholomew	1.8260						
	quadrierte Distanz	5.9770						
	Klassenwechsel	0.7898						

**Tabelle 8-6:** Gleichgewichtsmobilitäten der diversen hypothetischen und optimal adjustierten Dynamiken (Mittelwerte aus jeweils 1'000 Stichproben, Standardabweichung in Klammern, Shapiro-Francia Teststatistik auf Normalverteilung (kursiv)) sowie der wahren Einkommensdynamik

Um zu bestimmen, ob die ermittelten Gleichgewichtsindices normalverteilt sind, wurde die Verteilung der Indices jeweils einem Shapiro-Francia Test auf Normalverteilung (SF) unterworfen.<sup>100</sup> Zudem sind auch die Gleichgewichtsindices der wahren Übergangsdynamik in Tabelle 8-6 enthalten.

Falls die für ein Indexmass und einen Stichprobenumfang ermittelten Gleichgewichtsindices normalverteilt sind, lassen sich einfache t-Tests implementieren, um zu bestimmen, ob die optimal angepassten Hypothesen  $P_{opt}$  signifikant bessere Mobilitätsindices liefern als die ursprünglichen Hypothesen  $P_{mod}$ . Deshalb wird zunächst ein Blick auf die Shapiro-Francia Teststatistik geworfen. Der kritische Wert für die jeweils 1'000 Indexwerte beträgt auf dem 5%-Signifikanzniveau 0.9984. Die Nullhypothese der Normalverteilung kann nicht aufrecht erhalten werden, wenn die Teststatistik  $SF < 0.9984$  ist. Es zeigt sich, dass die Nullhypothese der Normalverteilung auf diesem Signifikanzniveau bloss in drei Fällen (grau unterlegte Felder der SF-Werte in Tabelle 8-6) verworfen werden muss, davon nur einmal deutlich. Auf dem 2.5% Signifikanzniveau (kritischer Wert: 0.9982) wären die beiden Fälle des Stichprobenumfangs 2'000 schon nicht mehr signifikant.

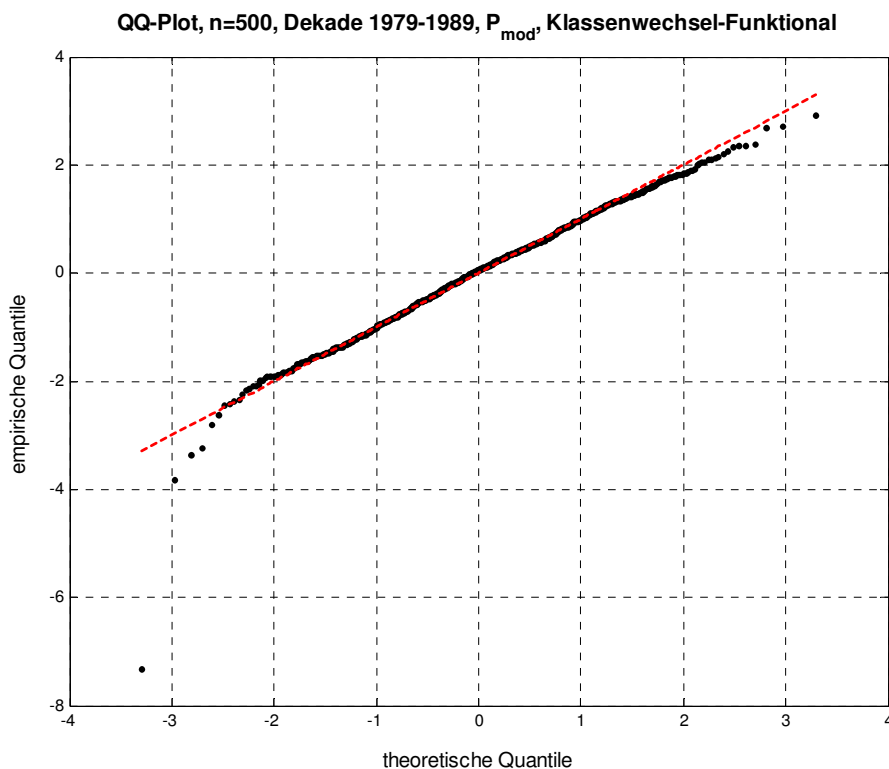
Wie beim Anderson-Darling Test sollte auch beim Shapiro-Francia Anpassungstest immer eine qualitative Beurteilung mittels zugehörigem Quantil-Quantil-Diagramm erfolgen.<sup>101</sup> Die Quantil-Quantil-Diagramme für die je 1'000 Werte der Gleichgewichtsindices bestätigen die Shapiro-Francia Teststatistiken. Stellvertretend werden hier die Quantil-Quantil Diagramme für  $n = 500$ , Klassenwechsel-Funktional, ur-

---

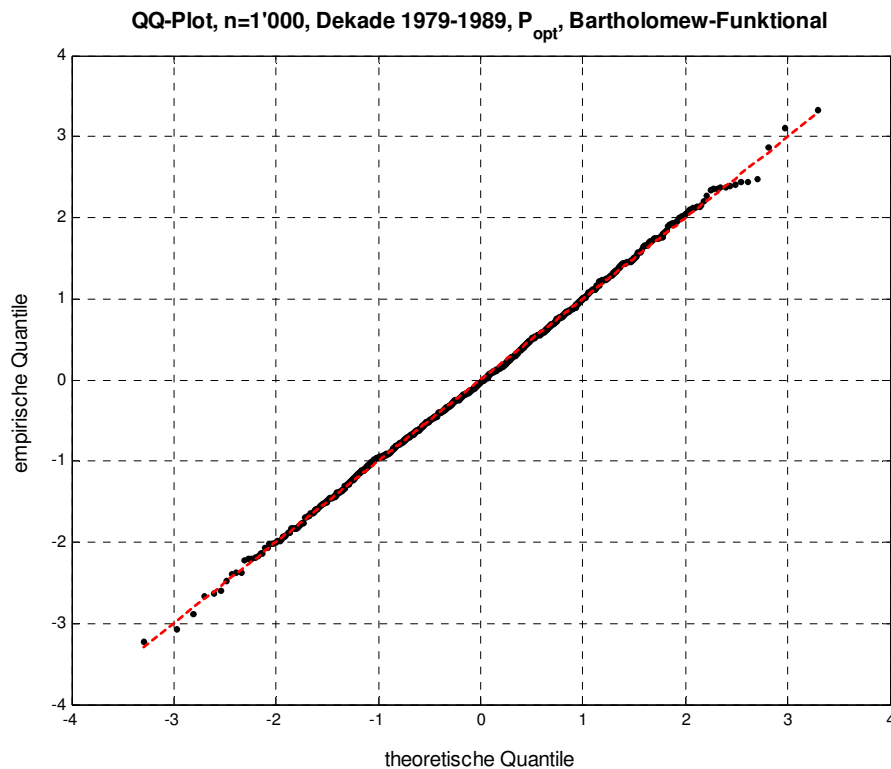
<sup>100</sup> Dieser Test wurde in Shapiro und Francia (1972) eingeführt. In Stephens (1986 b) findet sich eine Tabelle, mit deren Hilfe sich die Signifikanzniveaus dieses Tests bis zum Stichprobenumfang  $n = 1'000$  berechnen lassen (S. 203). Zudem findet sich dort auch eine Diskussion über die Familie der auf Korrelationsmassen basierenden Anpassungstests, zu denen der Shapiro-Francia Test gehört. Die Signifikanzniveaus für diesen Test lassen sich mittels normalverteilten Zufallszahlen in einer Monte-Carlo Simulation auch leicht selbst bestimmen. Auch der Shapiro-Francia Test berücksichtigt die gesamte Verteilung und ist somit ein Omnibus-Test. Unter den Omnibus-Tests für die Normalverteilung und für grosse Stichprobenumfänge gehört der Shapiro-Francia Test zu den aussagekräftigsten.

<sup>101</sup> Vergleich hierzu die Erläuterungen in Fussnote 97. Die hier dargestellten Quantil-Quantil-Diagramme wurden gemäss den Ausführungen in Stahel (1995) erstellt (S. 233ff).

sprüngliche Hypothesen (Ablehnung der Nullhypothese durch Shapiro-Francia) und  $n = 1'000$ , Bartholomew-Funktional, optimal angepasste Dynamiken (Nullhypothese wird durch Shapiro-Francia nicht verworfen) in den Abbildungen 8-3 respektive 8-4 dargestellt. Während die empirischen Quantile für  $n = 500$  stärker von den durch die 45°-Gerade symbolisierten theoretischen Quantilen abweichen (Abbildung 8-3), passen sie sich für  $n = 1'000$  deutlich besser an (Abbildung 8-4).



**Abbildung 8-3:** Quantil-Quantil-Diagramm der Gleichgewichtsindizes (Klassenwechsel-Funktional) der 1'000 Hypothesen  $P_{\text{mod}}$  des Stichprobenumfangs 500



**Abbildung 8-4:** Quantil-Quantil-Diagramm der Gleichgewichtsindices (Bartholomew-Funktional) der 1'000 optimal adjustierten Hypothesen  $P_{opt}$  des Stichprobenumfangs 1'000

Das Gesetz der grossen Zahlen führt natürlich auch hier dazu, dass sowohl die Genauigkeit wie auch die Schärfe der Schätzung der Mobilitätsindices mit steigendem Stichprobenumfang zunehmen. Dies trifft für die ursprünglichen wie auch für die optimal adjustierten Hypothesen zu. Interessanter ist jedoch die Feststellung, dass die Mobilitätsschätzung durch die Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie zumindest tendenziell genauer und schärfer wird. Für diejenigen Beobachtungen mit nicht signifikanter Shapiro-Francia Teststatistik lassen sich für die Bestimmung der Signifikanz dieser Verbesserungen einfache t-Tests implementieren. Bei den drei Beobachtungen mit signifikanter Shapiro-Francia Teststatistik kann aus der Verteilung der Indexwerte mittels Bootstrap-Techniken ein entspre-

chendes Konfidenzintervall berechnet werden.<sup>102</sup> In Tabelle 8-6 bedeuten grau unterlegte Felder der Standardabweichung der Mittelwerte, dass die entsprechende t-Teststatistik für den Vergleich der Mittelwerte mit den wahren Indexwerten auf dem 5%-Niveau (kritischer Wert für den zweiseitigen t-Test mit 999 Freiheitsgraden: 1.96) signifikant ausfällt. In diesen Fällen liegen die wahren Indexwerte ausserhalb der entsprechenden 95%-Konfidenzintervalle.

Die Anpassung der hypothetischen Dynamiken  $P_{\text{mod}}$  an die wahren Einkommensverteilungen der Dekade 1979 bis 1989 mittels der Methode der Minimierung der relativen Entropie erweisen sich somit für das Klassenwechsel-Funktional bei allen Stichprobenumfängen als signifikant. Während die 95%-Konfidenzintervalle für die hypothetischen Dynamiken  $P_{\text{mod}}$  bei allen Stichprobenumfängen den wahren Indexwert nicht beinhalten, ist dieser in den kleineren 95%-Vertrauensintervallen der optimal adjustierten Dynamiken des Klassenwechsel-Funktional enthalten. Die Anpassung an die wahren Einkommensverteilungen führt somit zu signifikant besseren Schätzungen des Gleichgewichtsindex des Klassenwechsel-Funktional.

Für das Bartholomew-Funktional resultieren durch die Anpassungen an die Einkommensverteilungen der Dekade 79-89 für die Stichprobenumfänge 500, 2'000 und 4'000 signifikant bessere Schätzungen des Bartholomew-Gleichgewichtsindex. Für die anderen Stichprobenumfänge sind die Verbesserungen nur noch tendenzieller Natur.

Beim Funktional der quadrierten Distanz führen die Anpassungen an die wahren Einkommensverteilungen mittels Minimierung der relativen Entropie zu keinen signifikanten Verbesserungen der Schätzung der Gleichgewichtsmobilität. Die Verbesserungen sind hier bloss noch tendenzieller Natur. Wie bei den beiden anderen Funktionalen führt die Anpassungsprozedur für alle Stichprobenumfänge zu kleineren Konfidenzintervallen und somit zu präziseren Schätzungen des wahren Indexwerts.

---

<sup>102</sup> Hierzu wird die empirische Verteilung der Mobilitätsindices eines Stichprobenumfangs mittels Bootstrap-Methoden genügend oft repliziert. Aus der resultierenden Verteilung der Mittelwerte wird dann das entsprechende Konfidenzintervall gebildet (vergleiche z.B. Stahel (1995), Kapitel 9.5 sowie die Erläuterungen in Fussnote 106, S. 169).

Diese Beobachtungen sind in anderer Form auch in Tabelle 8-7 dargestellt. Hier werden jeweils die Mittelwerte ( $\bar{x}$ ) und die Standardabweichungen ( $s_x$ ) der absoluten Differenzen der geschätzten Mobilitätsindices zu den wahren Indexwerten für alle Stichprobenumfänge aufgelistet.

		Stichproben						
		500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000	
$P_{mod}$	Bartholomew	$\bar{x}$	0.06461	0.04313	0.03043	0.02133	0.01516	0.01059
	$ i - j $	$s_x$	(0.04967)	(0.03276)	(0.02324)	(0.01633)	(0.01113)	(0.00813)
	Quadrierte Distanz	$\bar{x}$	0.38302	0.25395	0.18736	0.13038	0.09061	0.06416
	$(i - j)^2$	$s_x$	(0.29588)	(0.19532)	(0.13961)	(0.10155)	(0.06739)	(0.04855)
	Klassenwechsel	$\bar{x}$	0.01675	0.01138	0.00764	0.00542	0.00382	0.00274
	$(1 - \delta_{ij})$	$s_x$	(0.01346)	(0.00866)	(0.00564)	(0.00409)	(0.00285)	(0.00208)
$P_{opt}$	Bartholomew	$\bar{x}$	0.05894	0.04022	0.02836	0.02033	0.01427	0.00988
	$ i - j $	$s_x$	(0.04402)	(0.03048)	(0.02130)	(0.01516)	(0.01090)	(0.00779)
	Quadrierte Distanz	$\bar{x}$	0.34069	0.23184	0.16822	0.11902	0.08487	0.05741
	$(i - j)^2$	$s_x$	(0.26323)	(0.17710)	(0.12568)	(0.09139)	(0.06333)	(0.04546)
	Klassenwechsel	$\bar{x}$	0.01541	0.01089	0.00732	0.00522	0.00369	0.00270
	$(1 - \delta_{ij})$	$s_x$	(0.01167)	(0.00826)	(0.00535)	(0.00396)	(0.00279)	(0.00204)

**Tabelle 8-7:** Absolutwerte der Differenzen der Gleichgewichtsindices der diversen hypothetischen und optimal adjustierten Dynamiken zum wahren Indexwert (Mittelwerte aus jeweils 1'000 Stichproben, Standardabweichung in Klammern)

Auch hier wird manifest, dass der Prozess der Minimierung der relativen Entropie zumindest tendenziell zu genaueren Schätzungen der Mobilitätsindices führt. Alle Mittelwerte der absoluten Differenzen zum entsprechenden wahren Indexwert sind bei den optimal angepassten Hypothesen kleiner und die Streuung der einzelnen Differenzen ist geringer als bei den ursprünglichen Hypothesen.

Die Tatsache, dass der Anpassungsprozess zum Teil zu signifikanten Verbesserungen der Mobilitätsschätzung führt, liefert somit eine weitere Begründung dafür, für Betrachtungen der Einkommensdynamik die optimal adjustierte Übergangsmatrix auch dann zu verwenden, wenn die notwendigen Anpassungen der Hypothese an die beobachteten Randverteilungen im statistischen Sinne nicht signifikant ausfallen sollten. Wie schon bei den im Durchschnitt nicht signifikanten Anpassungen der hypothetischen Dynamiken an die beobachteten wahren Einkommensverteilungen muss auch hier darauf hingewiesen werden, dass die Stichproben in dieser Simulationsstudie durch perfekte Zufallsprozesse ermittelt wurden. Es ist davon auszugehen, dass die Verbesserungen der Mobilitätsschätzungen durch die Methode der Minimie-

rung der relativen Entropie eher noch deutlicher ausfallen werden, wenn die Auswahl der Stichproben nicht mehr aufgrund perfekter Zufallsprozesse erfolgen sollte.

### 8.4.2 Empirische Stichprobenmobilität

Es sei eine Ökonomie gegeben, deren Einkommensverteilung sich nach der Dynamik  $P_{\text{wahr}}$  entwickelt. Der gleichgewichtige Zustand wird durch die Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  repräsentiert. Die wahren Einkommensverteilungen der betrachteten Periode seien durch  $m_t$  und  $m_{t+1}$  gegeben. Aus dieser Ökonomie wird für die Periode von  $t$  bis  $t+1$  eine Stichprobe mit Stichprobenumfang  $n$  gezogen. Der in dieser Arbeit verwendeten Terminologie folgend wird die Stichprobendynamik mit  $P_{\text{mod}}$  (Übergangsmatrix),  $D_{\text{mod}}$  (zweidimensionale Dichtematrix) respektive  $\Gamma_{\text{mod}}$  (Einkommensgeschichtematrix) bezeichnet. Zudem bezeichnet  $\mu_t$  die Anfangsverteilung dieser Stichprobe.<sup>103</sup> Für solche Stichproben und ein gegebenes Mobilitätsfunktional  $F$  (vergleiche Definition 3-1, S. 50) gilt der folgende Zusammenhang:

$$\sum_{i=1}^n f_{X_t, X_{t+1}, i} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \gamma_{\text{mod}, ij} \cdot f_{ij} \cdot$$

Die Division durch den Stichprobenumfang  $n$  führt zu:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f_{X_t, X_{t+1}, i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \gamma_{\text{mod}, ij} \cdot f_{ij} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \frac{\gamma_{\text{mod}, ij}}{n} \cdot f_{ij} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K d_{\text{mod}, ij} \cdot f_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \mu_{t,i} \cdot p_{\text{mod}, ij} \cdot f_{ij} = \sum_{i=1}^K \mu_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\text{mod}, ij} \cdot f_{ij} \\ &= M_F(P_{\text{mod}}, \mu_t) \cdot \end{aligned}$$

Dabei entspricht  $M_F(P_{\text{mod}}, \mu_t)$  dem Wert des für die Dynamik  $P_{\text{mod}}$  bei der Stichproben-Anfangsverteilung  $\mu_t$  ausgewerteten Mobilitätsfunktionals  $F$ . Die Analogie zum Gleichgewichtsindex ist offensichtlich. Entspricht  $\mu_t$  der Gleichgewichtsverteilung von

---

<sup>103</sup> Auch wenn eine Stichprobe einem System im Gleichgewicht entstammen sollte, ist normalerweise die Anfangsverteilung  $\mu_t$  der Stichprobe nicht identisch mit der Stichproben-Gleichgewichtsverteilung und natürlich auch nicht mit der wahren Gleichgewichtsverteilung  $\pi$ .



$P_{\text{mod}}$ , dann entspricht dieses Mass dem Gleichgewichtsindex von  $P_{\text{mod}}$  zum Funktional  $F$  (vergleiche Definition 3-2, S. 50).

Analog zur empirischen Mobilität entlang des Einkommenspfads eines Individuums (Definition 3-3, S. 53) lässt sich die empirische Mobilität innerhalb einer Stichprobe definieren:

Definition 8-1: Für jeden auf dem Zustandsraum  $Z$  definierten Markovprozess  $\{X_t\}$  und jedes Mobilitätsfunktional  $F$  auf  $Z \times Z$  wird das Stichprobenmittel  $S_n$  von  $f_{X_t X_{t+1}, i}$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f_{X_t X_{t+1}, i} ,$$

*empirische Stichprobenmobilität* zum Stichprobenumfang  $n$  genannt.

THEOREM 8-1: Die empirische Stichprobenmobilität für die Periode von  $t$  bis  $t+1$  konvergiert für jede Anfangsverteilung  $m_t$  und jede primitive Übergangsmatrix  $P_{\text{wahr}}$  in Wahrscheinlichkeit gegen den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f_{X_t X_{t+1}, i} = \sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\text{wahr},ij} \cdot f_{ij} = M_F(P_{\text{wahr}}, m_t) \quad \mathbf{P}_{\text{wahr}, m_t} - \text{a.s.}$$

BEWEIS: Der Raum  $Z \times Z$  ist mit dem Wahrscheinlichkeitsmass  $\text{diag}(m_t) \cdot P_{\text{wahr}}$  versehen. Die Funktion  $f_{X_t X_{t+1}, i}$  wird auf  $Z \times Z$  ausgewertet, aus der fortlaufenden Mittelwertbildung ergibt sich  $S_n$ . Nach dem Gesetz der grossen Zahlen folgt, insbesondere da  $f_{X_t X_{t+1}, i}$  beschränkt ist, dass  $S_n$  gegen den Erwartungswert von  $f_{X_t X_{t+1}, i}$  bezüglich  $\text{diag}(m_t) \cdot P_{\text{wahr}}$ , das heisst gegen  $M_F(P_{\text{wahr}}, m_t)$  konvergiert.

Befindet sich das System in dieser Periode im Gleichgewicht, dann folgt, als Spezialfall, die Konvergenz gegen den Gleichgewichtsindex der wahren Dynamik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f_{X_t X_{t+1}, i} = \sum_{i=1}^K \pi_i \cdot \sum_{j=1}^K p_{\text{wahr},ij} \cdot f_{ij} = M_F(P_{\text{wahr}}, \pi) = M_F^e(P_{\text{wahr}}) .$$

Die Bestimmung der empirischen Stichprobenmobilität für die Dekade 1979 bis 1989 entspricht somit der Schätzung des bei der beobachteten Anfangsverteilung  $m_{1979}$

ausgewerteten Mobilitätsindex von  $P_{\text{wahr}}$  zum Mobilitätsfunktional  $F$ . Sie kann direkt, ohne Schätzung einer Übergangsmatrix, berechnet werden.

Wie in Abschnitt 8.2.1 erwähnt, wurden neben den Stichproben für die Dekade 79-89 mit denselben Zufallszahlen die entsprechenden gleichgewichtigen Stichproben simuliert. Aus diesen Stichproben lässt sich die wahre Gleichgewichtsmobilität somit direkt durch die Bestimmung der empirischen Stichprobenmobilität abschätzen, ohne zuvor eine Übergangsmatrix schätzen zu müssen.

Allgemein kann gesagt werden, dass die durch das gewählte Mobilitätsfunktional  $F$  gewichteten Einkommensklassenwechsel der durch eine Stichprobe aus  $n$  Individuen repräsentierten Periode von  $t$  bis  $t+1$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen den bei der wahren Anfangsverteilung  $m_t$  ausgewerteten Indexwert der zugrundeliegenden Dynamik  $P_{\text{wahr}}$  konvergieren. Falls sich das System in dieser Periode in seinem Gleichgewicht befinden sollte, entspricht dieser Wert dem wahren Gleichgewichtsindex.

Für die drei in Kapitel 3 vorgestellten Mobilitätsfunktionale wurde nun die empirische Mobilität für alle Stichproben jeweils direkt aus den Einkommenspfaden bestimmt. Zudem wurde die empirische Stichprobenmobilität auch für die jeweils optimal an die als beobachtet vorausgesetzten wahren Einkommensverteilungen adjustierten Übergangsmatrizen gemäss  $M_F(P_{\text{opt}}, m_{1979})$  respektive  $M_F(P_{\text{opt}}, \pi) = M_F^e(P_{\text{opt}})$  geschätzt und den direkt aus den Stichprobenpanels berechneten empirischen Mobilitäten gegenübergestellt. Diese Gegenüberstellung erlaubt erneut eine Bewertung der Methode der Minimierung der relativen Entropie zur Anpassung von Einkommenspanels an beobachtete Einkommensquerschnitte. In Abschnitt 8.4.2.1 sind die Resultate für die Dekade 79-89 dargestellt, in Abschnitt 8.4.2.2 finden sich die Auswertungen für den Gleichgewichtszustand.

#### 8.4.2.1 Stichproben der Dekade 1979 bis 1989

In Tabelle 8-8 finden sich die Mittelwerte und die Standardabweichungen (in Klammern) der empirischen Stichprobenmobilitäten der je 1'000 Stichproben aller Stichprobenumfänge. Auch wurde die Verteilung der Stichprobenmobilitäten jeweils einem Shapiro-Francia Test auf Normalverteilung unterworfen. Zusätzlich sind auch noch

die Werte für die wahre Dynamik aufgeführt. Die obere Teiltabelle enthält die Berechnungen, welche direkt aus den Stichproben ermittelt wurden. Hier wurden die empirischen Mobilitäten jeweils ohne vorgängige Berechnung der Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  ermittelt. Die untere Teiltabelle enthält die Resultate für die optimal an die beobachteten Einkommensquerschnitte  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  angepassten Dynamiken  $P_{\text{opt}}$ . Diese müssen hier gemäss  $S_n = M_F(P_{\text{opt}}, m_{1979})$  berechnet werden.

		Stichproben						Wahre Dynamik $M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979})$	
		empirische Stichprobenmobilitäten für $P_{\text{mod}}$ : $S_n = M_F(P_{\text{mod}}, \mu_{1979})$							
		500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000		
Dekade 1979 - 1989	Bartholomew $ i-j $	$\bar{x}$	1.7803	1.7784	1.7798	1.7791	1.7792	1.7793	1.7795
		$s_{\bar{x}}$	(0.002194)	(0.001549)	(0.001095)	(0.000788)	(0.000551)	(0.000394)	
		SF	<i>0.9993</i>	<i>0.9993</i>	<i>0.9991</i>	<i>0.9996</i>	<i>0.9989</i>	<i>0.9988</i>	
	Quadierte Distanz $(i-j)^2$	$\bar{x}$	5.6360	5.6304	5.6405	5.6389	5.6406	5.6402	5.6408
		$s_{\bar{x}}$	(0.012507)	(0.008694)	(0.006280)	(0.004531)	(0.003182)	(0.002264)	
		SF	<i>0.9994</i>	<i>0.9988</i>	<i>0.9989</i>	<i>0.9992</i>	<i>0.9994</i>	<i>0.9987</i>	
	Klassenwechsel $(1 - \delta_{ij})$	$\bar{x}$	0.7926	0.7913	0.7918	0.7913	0.7913	0.7914	0.7915
		$s_{\bar{x}}$	(0.000580)	(0.000416)	(0.000283)	(0.000203)	(0.000142)	(0.000104)	
		SF	<i>0.9990</i>	<i>0.9987</i>	<i>0.9982</i>	<i>0.9991</i>	<i>0.9994</i>	<i>0.9992</i>	
			empirische Stichprobenmobilitäten für $P_{\text{opt}}$ : $S_n = M_F(P_{\text{opt}}, m_{1979})$						
			500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000	
	Bartholomew $ i-j $	$\bar{x}$	1.7778	1.7773	1.7795	1.7788	1.7792	1.7791	
		$s_{\bar{x}}$	(0.002156)	(0.001512)	(0.001062)	(0.000756)	(0.000536)	(0.000377)	
		SF	<i>0.9996</i>	<i>0.9994</i>	<i>0.9995</i>	<i>0.9994</i>	<i>0.9991</i>	<i>0.9988</i>	
	Quadierte Distanz $(i-j)^2$	$\bar{x}$	5.6227	5.6261	5.6375	5.6378	5.6406	5.6392	
		$s_{\bar{x}}$	(0.012143)	(0.008357)	(0.006019)	(0.004278)	(0.003044)	(0.002113)	
		SF	<i>0.9996</i>	<i>0.9991</i>	<i>0.9992</i>	<i>0.9991</i>	<i>0.9996</i>	<i>0.9986</i>	
	Klassenwechsel $(1 - \delta_{ij})$	$\bar{x}$	0.7922	0.7910	0.7918	0.7912	0.7913	0.7914	
$s_{\bar{x}}$		(0.000583)	(0.000419)	(0.000279)	(0.000202)	(0.000142)	(0.000103)		
SF		<i>0.9993</i>	<i>0.9989</i>	<i>0.9983</i>	<i>0.9994</i>	<i>0.9996</i>	<i>0.9993</i>		

**Tabelle 8-8:** Empirische Stichprobenmobilitäten der hypothetischen sowie der optimal angepassten Dynamiken (Mittelwerte und Standardabweichung (in Klammern) sowie Shapiro-Francia Teststatistiken (kursiv) für jeweils 1'000 Stichproben) und Indexwerte der wahren Dynamik für die Periode 1979 bis 1989

Wenn die für ein Mobilitätsfunktional und einen Stichprobenumfang ermittelten 1'000 Werte der empirischen Stichprobenmobilität normalverteilt sind, lassen sich einfache t-Tests zur Bewertung von Hypothesen anwenden. Ein Blick auf die Shapiro-Francia Teststatistiken in Tabelle 8-8 zeigt, dass sowohl für die Stichproben selbst wie auch für die optimal angepassten Dynamiken bloss die Berechnungen für das Klassenwechsel-Funktional und den Stichprobenumfang 2'000 auf dem 5%-Niveau (kritischer Wert: 0.9984) signifikant sind (grau unterlegte Felder). Dort muss also die Nullhypothese einer Normalverteilung der Stichprobenmobilitäten verworfen werden (auf dem

2.5%-Signifikanzniveau dürfte die Nullhypothese jedoch schon nicht mehr verworfen werden).<sup>104</sup>

Für alle untersuchten Fälle lässt sich festhalten, dass die entsprechenden 95%-Konfidenzintervalle die zugehörigen wahren Indexwerte  $M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979})$  enthalten. Die Schätzungen der empirischen Stichprobenmobilitäten werden durch die Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie zur Anpassung der Stichprobendynamiken an die beobachteten Einkommensquerschnitte nicht signifikant verändert. Auch sind die tendenziellen Veränderungen hier weniger gut erkennbar, als bei den Berechnungen der Gleichgewichtsindices (Abschnitt 8.4.1).

Um die Tendenz der Veränderungen der Schätzung der empirischen Stichprobenmobilitäten durch die Methode der Minimierung der relativen Entropie besser erkennbar zu machen, werden wiederum die Mittelwerte und Standardabweichungen der absoluten Differenzen der empirischen Stichprobenmobilitäten zu den wahren Werten berechnet. Diese sind in Tabelle 8-9 dargestellt.

		Stichproben						
		$ M_F(P_{\text{mod}}, m_{1979}) - M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979}) $						
		500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000	
Dekade 1979 - 1989	<b>Bartholomew</b>	$\bar{x}$	0.0555	0.0389	0.0276	0.0200	0.0139	0.0098
	$ i-j $	$s_x$	(0.04168)	(0.02973)	(0.02090)	(0.01489)	(0.01054)	(0.00764)
	<b>Quadierte Distanz</b>	$\bar{x}$	0.3155	0.2207	0.1586	0.1131	0.0801	0.0562
	$(i-j)^2$	$s_x$	(0.23840)	(0.16414)	(0.11941)	(0.08789)	(0.06081)	(0.04440)
	<b>Klassenwechsel</b>	$\bar{x}$	0.0147	0.0105	0.0072	0.0051	0.0036	0.0026
	$(1 - \delta_{ij})$	$s_x$	(0.01106)	(0.00788)	(0.00531)	(0.00389)	(0.00268)	(0.00199)
			$ M_F(P_{\text{opt}}, m_{1979}) - M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979}) $					
			500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000
	<b>Bartholomew</b>	$\bar{x}$	0.0546	0.0381	0.0267	0.0192	0.0135	0.0094
	$ i-j $	$s_x$	(0.04082)	(0.02892)	(0.02036)	(0.01418)	(0.01025)	(0.00737)
	<b>Quadierte Distanz</b>	$\bar{x}$	0.3064	0.2107	0.1521	0.1072	0.0773	0.0521
	$(i-j)^2$	$s_x$	(0.23200)	(0.16008)	(0.11442)	(0.08257)	(0.05725)	(0.04186)
<b>Klassenwechsel</b>	$\bar{x}$	0.0148	0.0106	0.0071	0.0051	0.0036	0.0026	
$(1 - \delta_{ij})$	$s_x$	(0.01104)	(0.00798)	(0.00524)	(0.00387)	(0.00272)	(0.00196)	

**Tabelle 8-9:** Absolutwerte der Differenzen der Stichprobenmobilitäten zu den wahren Werten (Mittelwerte und Standardabweichungen (in Klammern) aus jeweils 1'000 Werten)

<sup>104</sup> In diesen beiden Fällen können Konfidenzintervalle mittels Bootstrap-Techniken ermittelt werden (vergleiche Fussnote 106, S. 169). Die qualitativen Tests auf Normalverteilung anhand von Quantil-

Tabelle 8-9 zeigt, dass die Schätzung der empirischen Stichprobenmobilität für das Bartholomew-Funktional und das Funktional der quadrierten Distanz durch die Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie tendenziell genauer (kleinerer Mittelwert) und schärfer (kleinere Standardabweichung) wird. Für das Klassenwechsel-Funktional sind die Beobachtungen hingegen nicht eindeutig.

Zusammenfassend kann für die Periode 1979 bis 1989 das Fazit gezogen werden, dass sich die Anpassung der Stichprobendynamiken an die beobachteten Einkommensquerschnitte auch bei der Bestimmung der empirischen Stichprobenmobilitäten eher vorteilig auf deren Schätzung auswirkt. Für zunehmenden Stichprobenumfang wird in den Tabellen 8-8 und 8-9 die aufgrund der Gesetzmässigkeit der grossen Zahlen zu erwartende Konvergenz der berechneten Masse gegen die wahren Werte ersichtlich.

#### 8.4.2.2 Stichproben des gleichgewichtigen Zustands

Die Mittelwerte der empirischen Stichprobenmobilitäten der je 1'000 Stichproben aller Stichprobenumfänge und deren Standardabweichungen (in Klammern) sind in Tabelle 8-10 aufgelistet. Die Verteilung der Stichprobenmobilitäten wurde auch hier jeweils einem Shapiro-Francia Test auf Normalverteilung unterworfen. Zusätzlich wurden auch die Werte für die wahre Dynamik berechnet. In der oberen Teiltabelle sind die Resultate enthalten, welche direkt aus den Stichproben ermittelt wurden. Die empirischen Stichprobenmobilitäten wurden jeweils ohne vorgängige Berechnung der Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  ermittelt. Die untere Teiltabelle listet die Resultate für die optimal an die wahre Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  angepassten Dynamiken  $P_{\text{opt}}$  auf. Diese müssen gemäss  $S_n = M_F(P_{\text{opt}}, \pi) = M_F^e(P_{\text{opt}})$  berechnet werden.

---

Quantil Diagrammen bestätigten auch hier die Shapiro-Francia Teststatistiken.

		Stichproben						Wahre Dynamik $M_F^e(P_{\text{wahr}})$	
		empirische Stichprobenmobilitäten für $P_{\text{mod}}: S_n = M_F(P_{\text{mod}}, \mu)$							
		500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000		
Gleichgewicht	Bartholomew $ i-j $	$\bar{x}$	1.8265	1.8274	1.8247	1.8252	1.8270	1.8261	1.8260
		$s_{\bar{x}}$	(0.002324)	(0.001628)	(0.001146)	(0.000828)	(0.000583)	(0.000403)	
		SF	<i>0.9987</i>	<i>0.9990</i>	<i>0.9990</i>	<i>0.9989</i>	<i>0.9984</i>	<i>0.9992</i>	
	Quadrierte Distanz $(i-j)^2$	$\bar{x}$	5.9846	5.9833	5.9717	5.9723	5.9820	5.9761	5.9770
		$s_{\bar{x}}$	(0.013630)	(0.009564)	(0.006671)	(0.004861)	(0.003358)	(0.002388)	
		SF	<i>0.9975</i>	<i>0.9993</i>	<i>0.9980</i>	<i>0.9988</i>	<i>0.9992</i>	<i>0.9994</i>	
	Klassenwechsel $(1 - \delta_{ij})$	$\bar{x}$	0.7896	0.7903	0.7895	0.7897	0.7902	0.7899	0.7898
		$s_{\bar{x}}$	(0.000579)	(0.000398)	(0.000285)	(0.000198)	(0.000140)	(0.000102)	
		SF	<i>0.9985</i>	<i>0.9990</i>	<i>0.9984</i>	<i>0.9986</i>	<i>0.9993</i>	<i>0.9985</i>	
			empirische Stichprobenmobilitäten für $P_{\text{opt}}: S_n = M_F(P_{\text{opt}}, \pi)$						
	Bartholomew $ i-j $	$\bar{x}$	1.8230	1.8263	1.8243	1.8250	1.8269	1.8260	
		$s_{\bar{x}}$	(0.002297)	(0.001568)	(0.001119)	(0.000808)	(0.000569)	(0.000388)	
SF		<i>0.9989</i>	<i>0.9988</i>	<i>0.9992</i>	<i>0.9992</i>	<i>0.9985</i>	<i>0.9990</i>		
Quadrierte Distanz $(i-j)^2$	$\bar{x}$	5.9635	5.9782	5.9700	5.9719	5.9817	5.9755		
	$s_{\bar{x}}$	(0.013237)	(0.009017)	(0.006330)	(0.004652)	(0.003210)	(0.002239)		
	SF	<i>0.9979</i>	<i>0.9991</i>	<i>0.9988</i>	<i>0.9994</i>	<i>0.9990</i>	<i>0.9995</i>		
Klassenwechsel $(1 - \delta_{ij})$	$\bar{x}$	0.7893	0.7901	0.7894	0.7896	0.7902	0.7899		
	$s_{\bar{x}}$	(0.000587)	(0.000396)	(0.000281)	(0.000197)	(0.000139)	(0.000101)		
	SF	<i>0.9994</i>	<i>0.9992</i>	<i>0.9983</i>	<i>0.9990</i>	<i>0.9993</i>	<i>0.9988</i>		

**Tabelle 8-10:** Empirische Stichprobenmobilitäten der hypothetischen sowie der optimal angepassten Dynamiken (Mittelwerte und Standardabweichung (in Klammern) sowie Shapiro-Francia Teststatistiken (kursiv) für jeweils 1'000 Stichproben) und Indexwerte der wahren Dynamik für den Gleichgewichtszustand

Die Shapiro-Francia Teststatistik auf Normalverteilung fällt hier auf dem 5%-Niveau (kritischer Wert: 0.9984) in vier Fällen signifikant aus. Drei dieser vier Fälle sind auf dem 1%-Niveau (kritischer Wert: 0.9979) nicht mehr signifikant.<sup>105</sup> Für die nicht-signifikanten Fälle lässt sich wiederum ein einfacher t-Test implementieren, um die Signifikanz der durch die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahre Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  erzielten Veränderungen der Schätzung der empirischen Stichprobenmobilitäten abzuschätzen.

Wie schon für die Stichproben der Dekade 1979 bis 1989 erweisen sich auch für die Stichproben des gleichgewichtigen Zustands die durch die Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie erzielten Veränderungen als nicht signifikant.

<sup>105</sup> Für die signifikanten Fälle lassen sich Konfidenzintervalle mittels Bootstrap-Techniken ermitteln (vergleiche Fussnote 106, S. 169). Die Shapiro-Francia Teststatistiken werden durch die entsprechenden Quantil-Quantil Diagramme bestätigt.

Mit Ausnahme des Klassenwechsel-Funktional beim Stichprobenumfang 8'000 enthalten die 95%-Vertrauensintervalle für alle untersuchten Fälle die zugehörigen Indexwerte  $M_F^e(P_{\text{wahr}})$  der wahren Dynamik. Für den Stichprobenumfang 8'000 und das Klassenwechsel-Funktional sind die Lagevergleiche der Index-Mittelwerte mit dem wahren Wert sowohl für die ursprünglichen Stichprobendynamiken als auch für die optimal adjustierten Dynamiken signifikant.

Um die Richtung der durch die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahre Gleichgewichtsverteilung erzielten Veränderungen der Schätzung der empirischen Stichprobenmobilitäten besser erkennenbar zu machen, werden erneut die Mittelwerte und Standardabweichung der absoluten Differenzen der empirischen Stichprobenmobilitäten zu den wahren Werten tabelliert. Diese sind in Tabelle 8-11 aufgeführt.

		Stichproben						
		$ M_F(P_{\text{mod}}, \mu) - M_F^e(P_{\text{wahr}}) $						
		500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000	
Gleichgewicht	<b>Bartholomew</b>	$\bar{x}$	0.0584	0.0413	0.0289	0.0207	0.0144	0.0102
	$ i-j $	$s_x$	(0.04459)	(0.03076)	(0.02197)	(0.01599)	(0.01158)	(0.00767)
	<b>Quadrierte Distanz</b>	$\bar{x}$	0.3412	0.2404	0.1674	0.1221	0.0837	0.0604
	$(i-j)^2$	$s_x$	(0.26323)	(0.18346)	(0.12833)	(0.09337)	(0.06545)	(0.04525)
	<b>Klassenwechsel</b>	$\bar{x}$	0.0145	0.0100	0.0071	0.0050	0.0035	0.0025
	$(1 - \delta_{ij})$	$s_x$	(0.01121)	(0.00759)	(0.00557)	(0.00379)	(0.00267)	(0.00201)
			$ M_F(P_{\text{opt}}, \pi) - M_F^e(P_{\text{wahr}})  =  M_F^e(P_{\text{opt}}) - M_F^e(P_{\text{wahr}}) $					
			500	1'000	2'000	4'000	8'000	16'000
	<b>Bartholomew</b>	$\bar{x}$	0.0576	0.0398	0.0283	0.0203	0.0141	0.0098
	$ i-j $	$s_x$	(0.04434)	(0.02960)	(0.02134)	(0.01559)	(0.01126)	(0.00739)
	<b>Quadrierte Distanz</b>	$\bar{x}$	0.3333	0.2281	0.1588	0.1168	0.0795	0.0569
	$(i-j)^2$	$s_x$	(0.25331)	(0.17093)	(0.12190)	(0.08952)	(0.06322)	(0.04215)
<b>Klassenwechsel</b>	$\bar{x}$	0.0147	0.0100	0.0070	0.0049	0.0035	0.0025	
$(1 - \delta_{ij})$	$s_x$	(0.01134)	(0.00756)	(0.00552)	(0.00382)	(0.00270)	(0.00199)	

**Tabelle 8-11:** Absolutwerte der Differenzen der Stichprobenmobilitäten zu den wahren Werten (Mittelwerte und Standardabweichungen (in Klammern) aus jeweils 1'000 Werten)

Die Beobachtungen decken sich mit jenen für die Dekade 79-89. So erweist sich die Anpassung der Stichprobenmobilitäten an die wahre Gleichgewichtsverteilung für das Bartholomew-Funktional und das Funktional der quadrierten Distanz erneut als tendenziell vorteilhaft für die Schätzung der empirischen Stichprobenmobilität (kleine-

rer Mittelwert, geringere Standardabweichung). Für das Klassenwechsel-Funktional sind die Beobachtungen wiederum nicht eindeutig.

Somit lässt sich auch für den Gleichgewichtszustand das Fazit ziehen, dass die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahre Gleichgewichtsverteilung für die Schätzung der empirischen Stichprobenmobilitäten eher von Vorteil ist. Die bei steigendem Stichprobenumfang aufgrund des Gesetzes der grossen Zahlen erwartete Konvergenz der geschätzten gegen die wahren Werte manifestiert sich auch in den Tabellen 8-10 und 8-11.

#### 8.4.2.3 Vergleich der Dekade 1979-1989 mit dem Gleichgewicht

Ein Vergleich der Resultate für die empirische Stichprobenmobilität in Tabelle 8-8 mit den jeweils wahren Gleichgewichtsindices aus Tabelle 8-10 zeigt auf, dass der wahre Wert der Gleichgewichtsmobilität für das Bartholomew-Funktional und das Funktional der quadrierten Distanz durch die empirische Stichprobenmobilität in der Periode 79-89 systematisch unterschätzt wird. Für das Klassenwechsel-Funktional, welches alle Veränderungen der angestammten Einkommensklasse mit dem gleichen Gewicht bewertet, resultiert hingegen eine systematische Überschätzung des wahren Werts der Gleichgewichtsmobilität. Diese Unterschiede erweisen sich für alle Funktionale und alle Stichprobenumfänge als hochgradig signifikant. Die Werte der wahren Gleichgewichtsindices liegen jeweils weit ausserhalb der entsprechenden 95%-Konfidenzintervalle (für diejenigen Verteilungen der empirischen Stichprobenmobilität in Tabelle 8-8, für die der Shapiro-Francia Test nicht-signifikant ausfiel, kann dies anhand einfacher t-Tests nachvollzogen werden).

Die Überschätzung im Falle des Klassenwechsel-Funktional kann nur so interpretiert werden, dass in der Dekade 79-89 überdurchschnittlich viele Individuen im Jahr 1989 nicht mehr in derselben Einkommensklasse sind, die sie im Jahr 1979 belegt haben. Durchschnittlich wechseln in der Dekade 79-89 zwischen 79.1% (Tabelle 8-8,  $S_n = M_F(P_{opt}, m_{1979})$ ,  $n = 2'000$ ) und 79.26% (Tabelle 8-8,  $S_n = M_F(P_{mod}, \mu_{1979})$ ,  $n = 500$ ) aller Individuen die angestammte Einkommensklasse. Im Gleichgewichtszustand sind es 78.98% (Tabelle 8-10, wahre Dynamik). Gemessen am Gleichge-



wichtszustand ist es folglich in dieser Periode zu überdurchschnittlich vielen Klassenwechseln gekommen.

Das Bartholomew-Funktional wie auch das Funktional der quadrierten Distanz gewichten jedoch nicht alle Klassenwechsel gleich. Je mehr Einkommensklassen übersprungen werden, desto höher fällt die durch diese Funktionale zugeordnete Gewichtung aus. Die systematischen Unterschätzungen der entsprechenden Gleichgewichtsindices durch diese Funktionale in der Dekade 1979 bis 1989 führt zu der Schlussfolgerung, dass in diesem Zeitraum unterdurchschnittlich viele Einkommensklassenwechsel über mehrere Einkommensklassen stattfanden. Das Bartholomew-Funktional bewertet Klassenwechsel über  $x$  Einkommensklassengrenzen mit dem Gewicht  $x$ . Die empirischen Stichprobenmobilitäten der Dekade 79-89 bewegen sich für dieses Funktional zwischen 1.7773 (Tabelle 8-8,  $S_n = M_F(P_{opt}, m_{1979})$ ,  $n = 1'000$ ) und 1.7798 (Tabelle 8-8,  $S_n = M_F(P_{mod}, \mu_{1979})$ ,  $n = 2'000$ ), die wahre Gleichgewichtsmobilität beträgt hingegen 1.8260. Einkommensklassenwechsel über zwei Klassengrenzen werden durch das Bartholomew-Funktional mit dem Gewicht 2 versehen, deshalb würde hier schon ein zusätzlicher Klassenwechsel über zwei Klassengrenzen die empirische Mobilität marginal in Richtung Gleichgewichtsmobilität verschieben. Folglich fanden in der Periode 79-89 unterdurchschnittlich viele Einkommensklassenwechsel über zwei und mehr Klassengrenzen statt.

Die Analyse der Veränderungen in der Einkommensverteilung während der Dekade 1979-1989 erweist sich als vielschichtig. Den überdurchschnittlich vielen Wechseln in eine benachbarte Einkommensklasse stehen unterdurchschnittlich viele Veränderungen über zwei und mehr Klassengrenzen gegenüber. Dieses Verhalten lässt sich jedoch nur dann entdecken, wenn für das Klassenwechsel- und das Bartholomew-Funktional sowohl die empirische Stichprobenmobilität dieser Periode wie auch die Gleichgewichtsmobilität geschätzt wird. Dieses Vorgehen ist zwar aufwendiger, führt jedoch eindeutig zu einem verbesserten Verständnis der untersuchten Einkommensdynamik in der betrachteten Periode. Der in diesem Abschnitt durchgeführte Vergleich verdeutlicht ein weiteres mal die Vorteile, welche der Ansatz über ein Mobilitätsfunktional als Bewertungsschema für Bewegungen zwischen den Einkommensklassen für die Analyse der Einkommensmobilität bringt. Ohne diesen Zugang zum Mobilitätsphänomen wäre die Erkenntnis, dass es in der Periode 1979 bis 1989 zu

überdurchschnittlich vielen Einkommensklassenwechseln kam, wobei unterdurchschnittlich viele Wechsel über zwei und mehr Klassengrenzen stattfanden, nicht zu gewinnen.

### 8.4.3 Implizite Periodenmobilität

Wie im vorangehenden Abschnitt dargestellt, lassen sich die empirischen Mobilitäten für jedes Mobilitätsfunktional  $F$  sowohl für die betrachtete Periode 1979 bis 1989 als auch für den Gleichgewichtszustand bestimmen. Die resultierenden Indices weichen, da die Stichproben der Dekade 79-89 nicht den Gleichgewichtszustand widerspiegeln, zwangsläufig voneinander ab. Diese Beobachtung wurde bei der Analyse in Abschnitt 8.4.2.3 dazu verwendet, das Verständnis der Einkommensdynamik in dieser Periode zu vertiefen. Die Differenz zwischen empirischer Stichprobenmobilität und Gleichgewichtsmobilität erweist sich auch bei der Bestimmung der Periodenmobilität als nutzbringend. Immer dann, wenn Stichproben aus einem System gezogen werden, das sich nicht in seinem Gleichgewicht befindet, unterscheiden sich empirische Stichprobenmobilität und Gleichgewichtsmobilität systematisch. Würde diese Abweichung, wie in Kapitel 3 demonstriert, entlang des Einkommenspfads eines Individuums auftreten, dann befände sich dieses Individuum auf einem Pfad grosser Abweichungen vom Gleichgewicht. Der Schwellenwert für diese Abweichung wäre gerade durch die empirische Mobilität entlang dieses Einkommenspfads gegeben. Es ist somit naheliegend, bei der empirischen Stichprobenmobilität dasselbe zu tun. Die implizit in der Stichprobe enthaltene empirische Stichprobenmobilität wird mit dem Schwellenwert  $\alpha$  gleichgesetzt, bei dem die Periodenmobilität für diese Stichprobe berechnet werden soll. Deshalb ist in diesem Abschnitt von impliziter Periodenmobilität die Rede. Analog zur empirischen Mobilität aus Kapitel 3 kann die empirische Stichprobenmobilität nur Werte im Intervall  $(0, \alpha_{\max})$  annehmen (vergleiche die Abschnitte 3.4.2 und 9.2.5).

Zunächst wird die Situation der impliziten Periodenmobilität für die Dekade 1979 bis 1989 anhand der wahren Dynamik analysiert. Danach wird die implizite Periodenmobilität aus den Stichproben dieser Periode geschätzt.

### 8.4.3.1 Wahre implizite Periodenmobilität der Dekade 1979 bis 1989

Der Schwellenwert  $\alpha$ , welcher als Grenzwert der empirischen Stichprobenmobilität implizit in den Daten der Periode 79-89 enthalten ist, ist gegeben durch:

$$\alpha = M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979}) .$$

In Tabelle 8-12 sind die Gleichgewichtsindices, die impliziten Schwellenwerte zur Bestimmung der Periodenmobilität sowie die daraus resultierenden Periodenindices der wahren Dynamik für die Dekade 79-89 und alle in Kapitel 3 diskutierten Mobilitätsfunktionale aufgelistet.

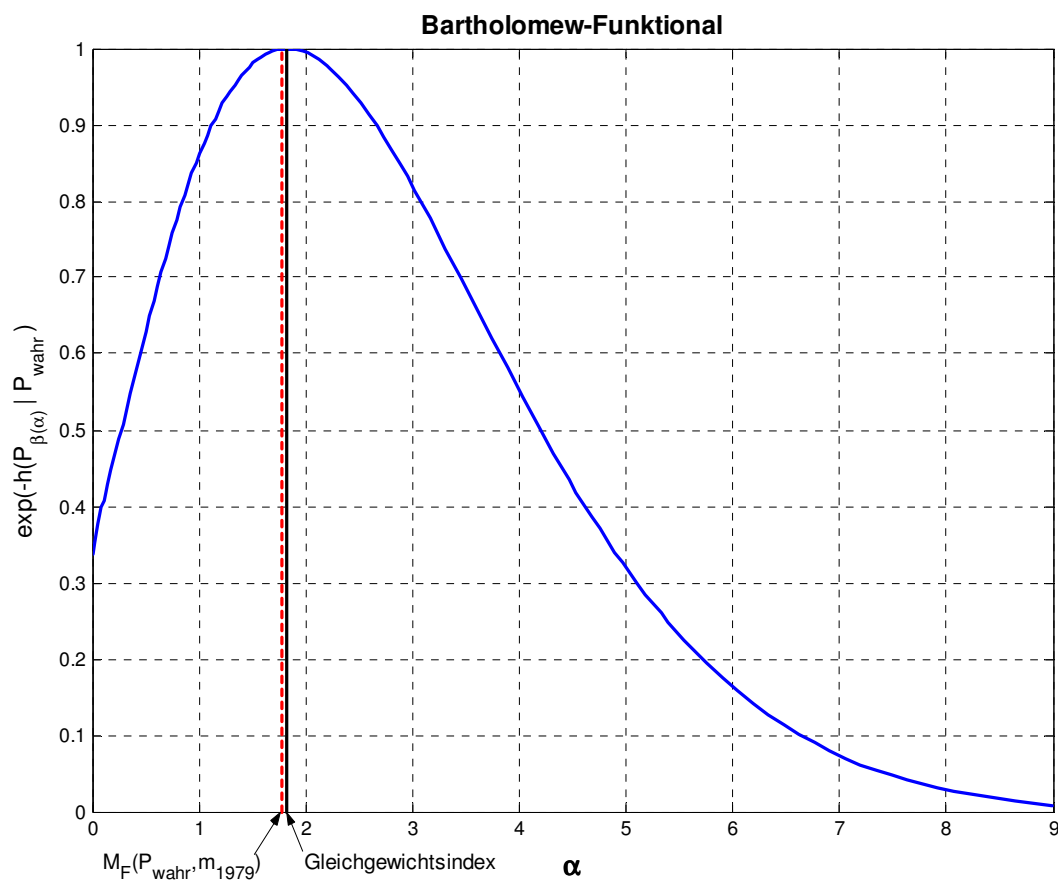
	$M_F^e(P_{\text{wahr}})$	$\alpha = M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979})$	$M_F^p(P_{\text{wahr}}   \alpha)$
<b>Bartholomew</b> $ i - j $	1.8260	1.7795	0.999612
<b>Quadierte Distanz</b> $(i - j)^2$	5.9770	5.6408	0.999406
<b>Klassenwechsel</b> $(1 - \delta_{ij})$	0.7898	0.7915	0.999992

**Tabelle 8-12:** Mobilitätsindices der wahren Dynamik

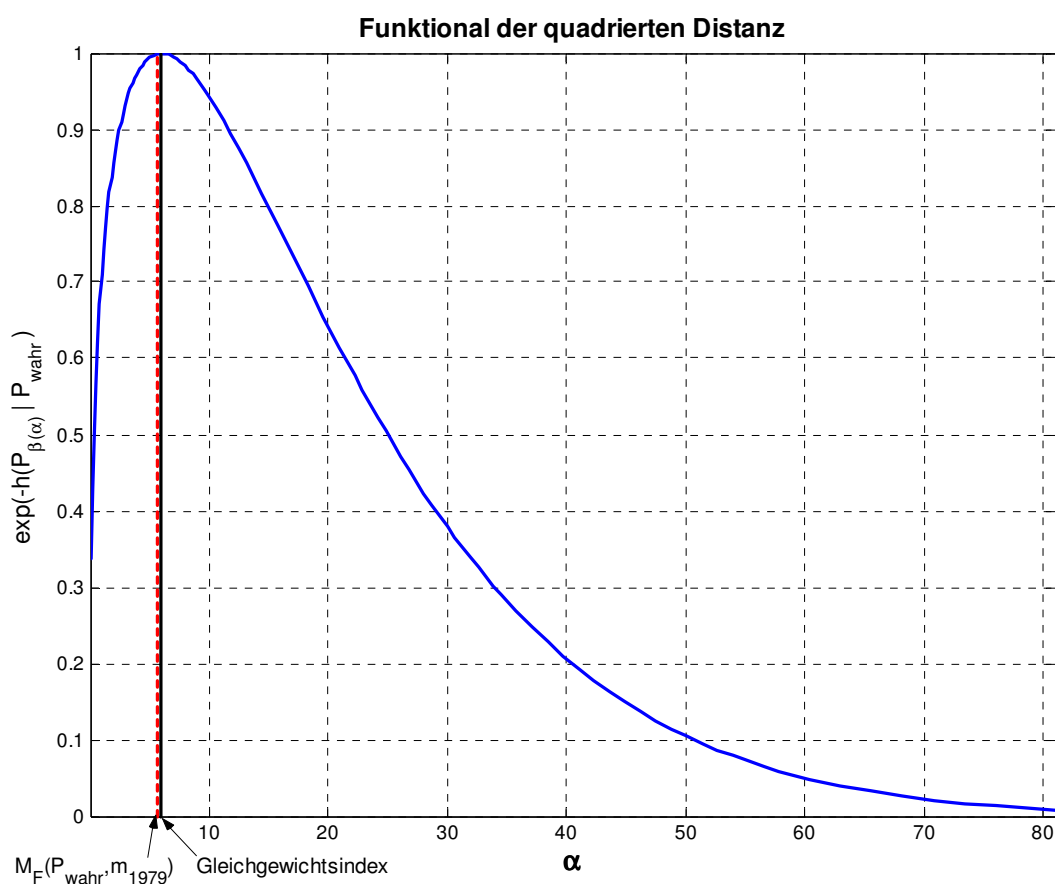
Wie die Resultate für die wahre Dynamik aufzeigen, wird die Gleichgewichtsmobilität durch  $M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979})$  bei den beiden Potenzfunktionalen (Bartholomew sowie quadrierte Distanz) unterschätzt, beim Funktional des unbedingten Klassenwechsels hingegen minim überschätzt. Wegen dieser relativ geringen Unter- respektive Überschätzung ist auch klar, dass die impliziten Periodenmobilitäten für alle Funktionale sehr nahe bei 1 liegen müssen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass sich die simulierte Ökonomie in der Dekade 1979 bis 1989 in der Nähe ihres Gleichgewichtszustands befinden muss.

In Kapitel 3 wurde das Prinzip grosser Abweichungen nur für solche oberhalb des Gleichgewichtsindex hergeleitet. Es wurde dort jedoch schon darauf verwiesen, dass die Theorie für grosse Abweichungen unterhalb des gleichgewichtigen Niveaus analog ist (vergleiche Abschnitt 3.4.3, Theorem 3-2, Fussnote 69). Im Anhang in Abschnitt 9.2.2.1 wird Theorem 3-2 für den allgemeinen Fall grosser Abweichungen von der Gleichgewichtsmobilität dargestellt, also auch für die hier bei den Potenzfunktionalen auftretende Abweichung unterhalb des Gleichgewichtsniveaus.

Für die wahre Einkommensdynamik und beide Potenzfunktionale zeigt Tabelle 8-12, dass die implizite Periodenmobilität  $M_F^D(P_{\text{wahr}} | \alpha = M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979}))$  und somit die Wahrscheinlichkeit weiterer Abweichungen unterhalb  $\alpha$  nahe bei 1 liegt. Die Periodenmobilität wird dann und nur dann gleich 1, wenn als Schwellenwert  $\alpha$  der Wert der entsprechenden Gleichgewichtsmobilität gesetzt wird. Mit anderen Worten ausgedrückt wird die implizite Periodenmobilität gleich 1, wenn sich die Gesellschaft in ihrem Gleichgewicht befindet. Somit besagen Indexwerte nahe bei 1, dass sich eine Ökonomie hinsichtlich des Einkommensverteilungsprozesses nahe bei ihrem Gleichgewichtszustand befinden muss. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 8-5 für das Bartholomew- und in Abbildung 8-6 für das Funktional der quadrierten Distanz grafisch dargestellt. In diesen Abbildungen sind die entsprechenden Periodenmobilitätskurven der Dynamik  $P_{\text{wahr}}$  über den gesamten möglichen Bereich grosser Abweichungen ( $\alpha \in (0, \alpha_{\text{max}}^*)$ ) vom jeweiligen Gleichgewichtsindex dargestellt. Zudem sind die Werte für den Gleichgewichtsindex sowie für  $\alpha = M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979})$  eingetragen.

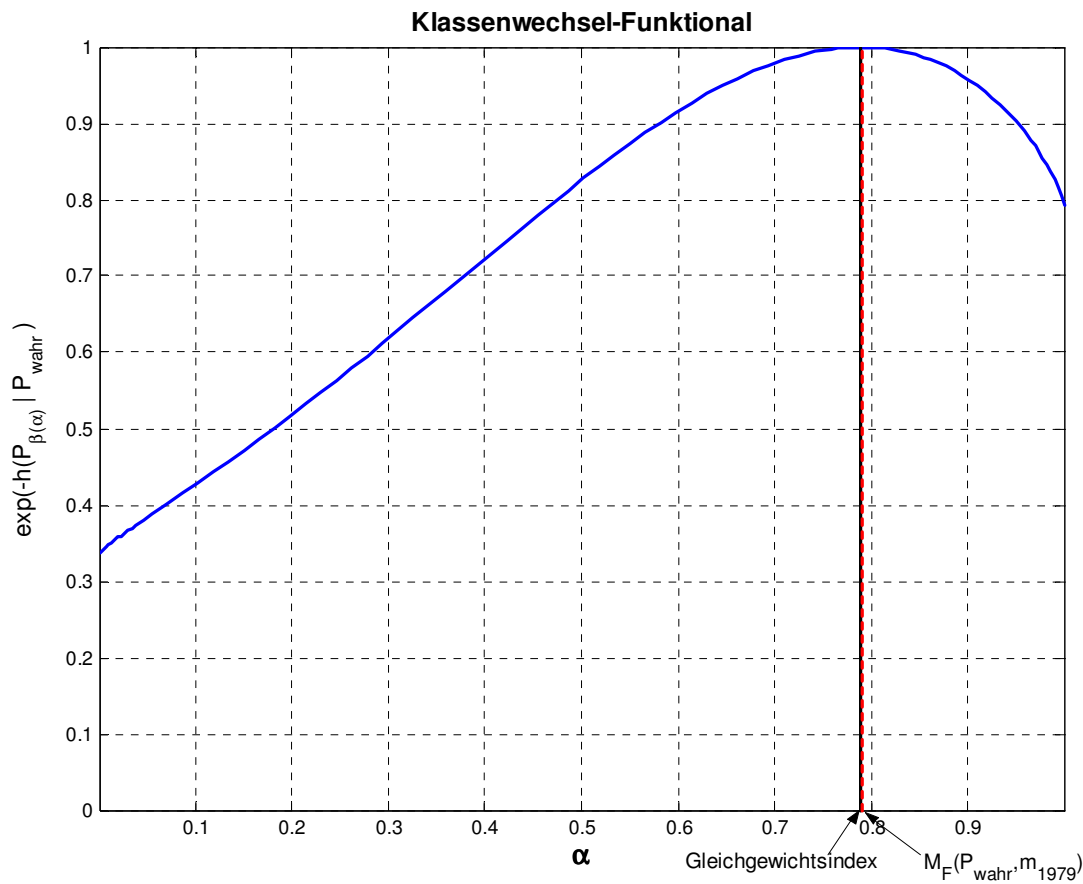


**Abbildung 8-5:** Periodenmobilitätskurve der wahren Dynamik ( $f_{ij} = |i - j|$ )



**Abbildung 8-6:** Periodenmobilitätskurve der wahren Dynamik ( $f_{ij} = (i - j)^2$ )

Da für das Klassenwechselfunktional in der Dekade 1979 bis 1989 von grossen Abweichungen der empirischen Mobilität oberhalb des Gleichgewichtsindexes gesprochen werden muss, gelten hier dieselben Schlussfolgerungen wie für die beiden Potenzfunktionale, jedoch mit umgekehrten "Vorzeichen". Die Wahrscheinlichkeit für anhaltende Abweichungen oberhalb  $\alpha = M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979})$  liegt extrem nahe bei 1. Dies ist ein Hinweis darauf, dass sich die gemäss den empirisch motivierten Vorgaben aus Kapitel 5 simulierte Ökonomie hinsichtlich ihres Einkommensverteilungsprozesses nahe bei ihrem Gleichgewichtszustand befindet. Dieser Sachverhalt wird für die wahre Dynamik, durch Aufzeichnen des Verlaufs der Periodenmobilität der Dynamik  $P_{\text{wahr}}$  über den gesamten Definitionsbereich möglicher grosser Abweichungen  $\alpha$ , in Abbildung 8-7 dargestellt.



**Abbildung 8-7:** Periodenmobilitätskurve der wahren Dynamik ( $f_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ )

#### 8.4.3.2 Geschätzte implizite Periodenmobilitäten für die Dekade 1979 bis 1989

In diesem Abschnitt werden die impliziten Periodenmobilitäten aus den Stichproben für die Dekade 79-89 geschätzt. Zunächst für die Stichprobendynamiken  $P_{\text{mod}}$ , welche direkt aus den Stichproben ermittelt werden. Danach für die optimal an die wahren Einkommensverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  angepassten Übergangsdynamiken  $P_{\text{opt}}$ . Somit eröffnet sich hier eine weitere Gelegenheit, die Methode der Minimierung der relativen Entropie zur Anpassung der Stichprobendynamiken an die beobachteten wahren Einkommensverteilungen der Dekade 1979-1989 auf ihre Wirksamkeit zu untersuchen.

In Tabelle 8-13 sind die Mittelwerte, ihre Standardabweichungen (in Klammern) sowie die resultierenden 95%-Konfidenzintervalle (kursiv) für die je 1'000 Werte der impliziten Periodenmobilitäten für alle Stichprobenumfänge und alle in Kapitel 3 erwähnten Mobilitätsfunktionale dargestellt, wie sie sich aus den Stichprobendynami-

ken  $P_{\text{mod}}$  ergeben.<sup>106</sup> Der Vollständigkeit halber sind noch die Mittelwerte der entsprechenden Gleichgewichtsindices und der empirischen Mobilitäten sowie deren Standardabweichungen aufgelistet.<sup>107</sup>

	$M_F^e(P_{\text{mod}})$		$\alpha = M_F(P_{\text{mod}}, \mu_{1979})$		$M_F^p(P_{\text{mod}}   \alpha)$				
	$\bar{x}$	$s_{\bar{x}}$	$\bar{x}$	$s_{\bar{x}}$	$\bar{x}$	$s_{\bar{x}}$	95%-Vertrauensbereich		
Stichproben	500	Bartholomew	1.8115	(0.00254)	1.7803	(0.00219)	0.999631	(0.0000149)	<i>(0.9996043, 0.9996609)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9082	(0.01515)	5.6360	(0.01251)	0.999372	(0.0000224)	<i>(0.9993298, 0.9994150)</i>
		Klassenwechsel	0.7862	(0.00067)	0.7926	(0.00058)	0.999727	(0.0000200)	<i>(0.9996842, 0.9997618)</i>
	1'000	Bartholomew	1.8181	(0.00170)	1.7784	(0.00155)	0.999653	(0.0000085)	<i>(0.9996373, 0.9996693)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9393	(0.01006)	5.6304	(0.00869)	0.999406	(0.0000138)	<i>(0.9993783, 0.9994328)</i>
		Klassenwechsel	0.7875	(0.00045)	0.7913	(0.00042)	0.999903	(0.0000053)	<i>(0.9998934, 0.9999142)</i>
	2'000	Bartholomew	1.8230	(0.00121)	1.7798	(0.00110)	0.999638	(0.0000061)	<i>(0.9996258, 0.9996495)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9637	(0.00738)	5.6405	(0.00628)	0.999411	(0.0000102)	<i>(0.9993906, 0.9994302)</i>
		Klassenwechsel	0.7891	(0.00030)	0.7918	(0.00028)	0.999952	(0.0000024)	<i>(0.9999471, 0.9999567)</i>
	4'000	Bartholomew	1.8242	(0.00085)	1.7791	(0.00079)	0.999623	(0.0000040)	<i>(0.9996154, 0.9996307)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9716	(0.00522)	5.6389	(0.00453)	0.999401	(0.0000069)	<i>(0.9993875, 0.9994145)</i>
		Klassenwechsel	0.7891	(0.00021)	0.7913	(0.00020)	0.999974	(0.0000012)	<i>(0.9999716, 0.9999761)</i>
	8'000	Bartholomew	1.8250	(0.00059)	1.7792	(0.00055)	0.999618	(0.0000029)	<i>(0.9996122, 0.9996235)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9737	(0.00357)	5.6406	(0.00318)	0.999408	(0.0000046)	<i>(0.9993993, 0.9994171)</i>
		Klassenwechsel	0.7894	(0.00015)	0.7913	(0.00014)	0.999984	(0.0000006)	<i>(0.9999827, 0.9999851)</i>
	16'000	Bartholomew	1.8253	(0.00042)	1.7793	(0.00039)	0.999615	(0.0000019)	<i>(0.9996116, 0.9996193)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9751	(0.00254)	5.6402	(0.00226)	0.999406	(0.0000033)	<i>(0.9993995, 0.9994125)</i>
		Klassenwechsel	0.7896	(0.00011)	0.7914	(0.00010)	0.999988	(0.0000003)	<i>(0.9999873, 0.9999887)</i>

**Tabelle 8-13:** Gleichgewichtsindices, Stichprobenmobilitäten und implizite Periodenmobilitäten (direkt aus den Stichproben ermittelt, Mittelwerte und deren Standardabweichungen (in Klammern) aus je 1'000 Werten sowie 95%-Konfidenzintervalle (kursiv))

<sup>106</sup> Da die impliziten Periodenmobilitäten sich deutlich als nicht normalverteilt erweisen, wurden die 95%-Vertrauensintervalle mittels Bootstrap-Techniken ermittelt. Hierzu wurde die empirische Verteilung der Periodenmobilitäten als wahre Verteilung postuliert. Diese wurde dann mittels Bootstrap 1'000 mal repliziert. Aus diesen 1'000 Replikationen wurden die Mittelwerte ermittelt und die Verteilung dieser Mittelwerte liefert dann die Standardabweichungen der Mittelwerte wie auch die 95%-Konfidenzintervalle (vergleiche z.B. Stahel (1995), Kapitel 9.5). Letztere werden generiert, indem die 1'000 Mittelwerte der Grösse nach geordnet werden. Die untere Grenze ergibt sich dann gemäss dem arithmetischen Mittel des 25. und 26. Mittelwerts, die obere Grenze ist der Mittelwert des 975. und 976. Mittelwerts (vergleiche z.B. Davidson und MacKinnon (1993), S.765). So werden aus der Verteilung der Mittelwerte die 25 kleinsten und die 25 grössten Werte eliminiert, insgesamt also 5% der 1'000 Mittelwerte. Die verbleibenden 95% befinden sich innerhalb der Grenzen des 95%-Vertrauensintervalls.

<sup>107</sup> Diese Werte sind ursprünglich in den oberen Teiltabellen von Tabelle 8-6 (Gleichgewichtsindices) und Tabelle 8-8 (empirische Stichprobenmobilitäten) für die Stichprobendynamiken  $P_{\text{mod}}$  dargestellt. Deshalb wurden in Tabelle 8-13 die Shapiro-Francia Teststatistiken auf Normalverteilung nicht nochmals aufgelistet.

Für diejenigen Stichprobenumfänge, für welche die entsprechenden 95%-Konfidenzintervalle die wahren Indexwerte aus Tabelle 8-12 nicht enthalten, sind entweder die Standardabweichungen der Mittelwerte (Gleichgewichtsindices und empirische Stichprobenmobilitäten) oder die 95%-Vertrauensintervalle (implizite Periodenmobilitäten) in Tabelle 8-13 grau unterlegt.

Die zu Tabelle 8-13 analogen Schätzungen für die mittels der Methode der Minimierung der relativen Entropie optimal an die wahren Einkommensverteilungen angepassten Dynamiken  $P_{opt}$  sind in Tabelle 8-14 dargestellt.<sup>108</sup>

	$M_F^e(P_{opt})$		$\alpha = M_F(P_{opt}, m_{1979})$		$M_F^p(P_{opt}   \alpha)$		
	$\bar{x}$	$s_x$	$\bar{x}$	$s_x$	$\bar{x}$	$s_x$	95%-Vertrauensbereich
Stichproben	500	Bartholomew	1.8218 (0.00232)	1.7778 (0.00216)	0.999625 (0.0000064)		<i>(0.9996123, 0.9996376)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9459 (0.01358)	5.6227 (0.01214)	0.999416 (0.0000079)		<i>(0.9994006, 0.9994307)</i>
		Klassenwechsel	0.7899 (0.00061)	0.7922 (0.00058)	0.999941 (0.0000036)		<i>(0.9999336, 0.9999476)</i>
	1'000	Bartholomew	1.8228 (0.00159)	1.7773 (0.00151)	0.999618 (0.0000040)		<i>(0.9996093, 0.9996254)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9574 (0.00921)	5.6261 (0.00836)	0.999406 (0.0000055)		<i>(0.9993952, 0.9994167)</i>
		Klassenwechsel	0.7891 (0.00043)	0.7910 (0.00042)	0.999972 (0.0000012)		<i>(0.9999700, 0.9999746)</i>
	2'000	Bartholomew	1.8256 (0.00112)	1.7795 (0.00106)	0.999612 (0.0000032)		<i>(0.9996058, 0.9996184)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9716 (0.00664)	5.6375 (0.00602)	0.999406 (0.0000041)		<i>(0.9993974, 0.9994135)</i>
		Klassenwechsel	0.7901 (0.00029)	0.7918 (0.00028)	0.999982 (0.0000007)		<i>(0.9999809, 0.9999836)</i>
	4'000	Bartholomew	1.8249 (0.00080)	1.7788 (0.00076)	0.999614 (0.0000020)		<i>(0.9996096, 0.9996176)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9732 (0.00475)	5.6378 (0.00428)	0.999406 (0.0000029)		<i>(0.9994005, 0.9994117)</i>
		Klassenwechsel	0.7895 (0.00021)	0.7912 (0.00020)	0.999987 (0.0000005)		<i>(0.9999858, 0.9999876)</i>
	8'000	Bartholomew	1.8256 (0.00057)	1.7792 (0.00054)	0.999611 (0.0000014)		<i>(0.9996085, 0.9996141)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9766 (0.00335)	5.6406 (0.00304)	0.999406 (0.0000019)		<i>(0.9994020, 0.9994095)</i>
		Klassenwechsel	0.7896 (0.00015)	0.7913 (0.00014)	0.999990 (0.0000003)		<i>(0.9999892, 0.9999903)</i>
	16'000	Bartholomew	1.8255 (0.00040)	1.7791 (0.00038)	0.999612 (0.0000010)		<i>(0.9996099, 0.9996138)</i>
		Quadrierte Distanz	5.9752 (0.00232)	5.6392 (0.00211)	0.999406 (0.0000013)		<i>(0.9994038, 0.9994090)</i>
		Klassenwechsel	0.7897 (0.00011)	0.7914 (0.00010)	0.999991 (0.0000002)		<i>(0.9999905, 0.9999913)</i>

**Tabelle 8-14:** Gleichgewichtsindices, Stichprobenmobilitäten und implizite Periodenmobilitäten (basierend auf den optimal adjustierten Dynamiken  $P_{opt}$ , Mittelwerte und deren Standardabweichungen (in Klammern) aus je 1'000 Werten sowie 95%-Konfidenzintervalle (kursiv))

Es zeigt sich, dass sich die Schätzungen der Gleichgewichts- und der impliziten Periodenmobilität aus den direkt aus den Stichproben generierten Dynamiken  $P_{mod}$  für das Klassenwechsel-Funktional und alle Stichprobenumfänge signifikant von den

<sup>108</sup> Die Werte für die Gleichgewichts- und die empirische Stichprobenmobilität wurden ursprünglich in den unteren Teiltabellen von Tabelle 8-6 (Gleichgewichtsindices) und Tabelle 8-8 (empirische Stichprobenmobilitäten) für die optimal adjustierten Dynamiken  $P_{opt}$  dargestellt. Dort finden sich auch die Shapiro-Francia Teststatistiken auf Normalverteilung, welche hier nicht nochmals aufgelistet werden.



jeweils wahren Indexwerten aus Tabelle 8-12 unterscheiden (Tabelle 8-13). Für die optimal adjustierten Dynamiken  $P_{opt}$  resultiert die in Abschnitt 8.4.1 erwähnte signifikante Verbesserung der Schätzung der Gleichgewichtsmobilität. Bei der impliziten Periodenmobilität führt die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahren Einkommensverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  zwar zu einer deutlichen Reduktion der 95%-Konfidenzintervalle, der wahre Indexwert befindet sich jedoch nach wie vor für alle Stichprobenumfänge ausserhalb der Vertrauensintervalle (Tabelle 8-14).

Beim Bartholomew-Funktional und den Stichprobendynamiken  $P_{mod}$  enthalten die 95%-Vertrauensbereiche für den Gleichgewichtsindex der Stichprobenumfänge 500, 1'000, 2'000 und 4'000 den wahren Indexwert nicht. Dasselbe trifft für die implizite Periodenmobilität der Stichprobenumfänge 1'000, 2'000, 4'000 und 8'000 zu. Für die optimal adjustierten Dynamiken  $P_{opt}$  trifft dies für die Gleichgewichtsmobilität nur noch beim Stichprobenumfang 1'000 zu, für die Periodenmobilität liegt der wahre Indexwert nur beim Stichprobenumfang 500 ausserhalb des zugehörigen Konfidenzintervalls. Die Schätzung der Gleichgewichtsmobilität wird somit für die Stichprobenumfänge 500, 2'000 und 4'000 durch die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahren Einkommensverteilungen signifikant verbessert. Für die Stichprobenumfänge 1'000 bis 8'000 resultiert auch für die Periodenmobilität eine signifikante Verbesserung der Schätzung. Beim Stichprobenumfang 500 müsste jedoch von einer signifikanten Verschlechterung gesprochen werden. Es gilt hier allerdings zu berücksichtigen, dass die 95%-Vertrauensbereiche für alle Stichprobenumfänge durch die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahren Einkommensverteilungen deutlich verkleinert werden.<sup>109</sup> Obschon beim Stichprobenumfang 500 der Mittelwert der impliziten Periodenmobilität bei den adjustierten Dynamiken  $P_{opt}$  (0.999625) näher beim wahren Indexwert (0.999612) liegt als derjenige der Stichprobendynamiken  $P_{mod}$  (0.999631), liegt der wahre Indexwert innerhalb des 95%-Vertrauensbereichs der Stichprobendynamiken, jedoch ausserhalb des Konfidenzin-

---

<sup>109</sup> Über alle Mobilitätsfunktionale und Stichprobenumfänge verglichen erweisen sich die 95%-Vertrauensintervalle für die Stichprobendynamiken  $P_{mod}$  1.71 bis 5.55 mal so lang wie diejenigen für die optimal adjustierten Dynamiken  $P_{opt}$ . Beim Bartholomew-Funktional und dem Stichprobenumfang 500 handelt es sich um einen Faktor 2.24.

tervalls der optimal adjustierten Dynamiken. Diese Beobachtung könnte für den Stichprobenumfang 500 und die Schätzung der impliziten Periodenmobilität in anderen Worten etwa so formuliert werden: Die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahren Einkommensverteilungen führt im Durchschnitt zu genaueren Schätzungen des wahren Indexwerts, die Chancen, mit einer Stichprobe den wahren Wert zu treffen, sind jedoch für die ursprünglichen Stichprobendynamiken höher. Unter diesem Aspekt erweisen sich die signifikanten Verbesserungen bei den anderen Stichprobenumfängen als umso eindrucklicher.

Beim Funktional der quadrierten Distanz enthalten die 95%-Vertrauensbereiche der Stichprobenumfänge 500 und 1'000 den wahren Gleichgewichtsindex nicht, dies sowohl bei den direkt aus den Stichproben generierten Dynamiken wie auch bei den optimal adjustierten Dynamiken. Für die implizite Periodenmobilität ist der wahre Indexwert in allen Konfidenzintervallen enthalten. Auch hier führt die Methode der Minimierung der relativen Entropie bei allen Stichprobenumfängen zu deutlichen Reduktionen der 95%-Vertrauensintervalle. Die Schätzungen der impliziten Periodenmobilität werden zwar nicht signifikant verbessert, in der Tendenz führt die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahren Einkommensverteilungen jedoch zu genaueren, weniger stark gestreuten Schätzwerten.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die zum Teil signifikanten Verbesserungen der Schätzung der impliziten Periodenmobilität deutlich für die Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie zur Anpassung von Stichprobendynamiken an beobachtete Querschnittsverteilungen sprechen.

## **8.5 SCHLUSSBEMERKUNGEN**

In diesem Kapitel wurde der Einkommensverteilungsprozess einer Ökonomie gemäss den empirischen Vorgaben für die USA aus Kapitel 5 simuliert. Dazu wurde die dort geschätzte Übergangsmatrix als wahr postuliert und die dort erhobenen Einkommensverteilungen als wahr und bekannt vorausgesetzt. Mittels Zufallszahlen wurden für unterschiedliche Stichprobenumfänge (500, 1'000, 2'000, 4'000, 8'000 und 16'000 Individuen) je 1'000 Stichprobenpanels simuliert. Die Simulation wurde simultan für die Dekade 1979 bis 1989 sowie für den Gleichgewichtszustand vorge-

nommen, wodurch für alle Stichprobenumfänge je 1'000 Panels für die Dekade 79-89 wie auch für den Gleichgewichtszustand generiert wurden.

Die Stichproben der Dekade 79-89 wurden dann mittels der Methode der Minimierung der relativen Entropie optimal an die als beobachtet vorausgesetzten wahren Einkommensverteilungen angepasst. Die notwendigen Anpassungen erwiesen sich durchschnittlich im statistischen Sinne als nicht signifikant. Es zeigt sich hier deutlich, dass das Gesetz der grossen Zahlen bei wirklichen Zufallsprozessen sehr effizient zum Tragen kommt. Die Wahrscheinlichkeit, eine schlechte Stichprobe zu ziehen, wird mit steigendem Stichprobenumfang rasch sehr klein.

Um die Methode der Minimierung der relativen Entropie zu evaluieren, wurden alle in Kapitel 3 diskutierten Gleichgewichtsindices sowohl für die ursprünglichen Stichprobendynamiken als auch für die optimal an die wahren Einkommensverteilungen adjustierten Dynamiken bestimmt. Aus den für jeden Stichprobenumfang resultierenden Verteilungen der Indexwerte wurden 95%-Konfidenzintervalle für die Lage des Mittelwerts bestimmt. Es zeigt sich, dass die Konfidenzintervalle für die optimal angepassten Dynamiken durchwegs kleiner sind als für die entsprechenden Stichprobendynamiken. Die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahren Einkommensverteilungen reduziert somit die Streuung der Schätzung der Gleichgewichtsindices. Wichtiger als diese Beobachtung ist jedoch die Tatsache, dass die Schätzung der Gleichgewichtsmobilität in vielen Fällen signifikant verbessert wird. Dieser Vergleich der Gleichgewichtsindices in den ursprünglichen und den optimal angepassten Dynamiken liefert somit ein starkes Argument für die Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie bei der Bestimmung von Übergangsmatrizen aus Paneldaten. Die zusätzlich in den beobachteten Einkommensquerschnitten enthaltene Information kann, verglichen mit den reinen Paneldaten, zu signifikanten Verbesserungen von Mobilitätsschätzungen führen.

Anhand der gleichgewichtigen Stichproben wurde aufgezeigt, wie die Gleichgewichtsmobilität direkt aus den Stichproben geschätzt werden kann, ohne vorgängige Schätzung einer Übergangsdynamik. Es wurde demonstriert, wie die so ermittelte empirische Mobilität mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen die wahre Gleichgewichtsmobilität konvergiert. Analog zur empirischen Mobilität entlang des Einkom-

menspfaads eines Individuums (vergleiche Definition 3-3, S. 53) führt diese Art der Mobilitätsschätzung zur Definition der empirischen Stichprobenmobilität.

Die Stichproben der Dekade 1979 bis 1989 widerspiegeln nicht den Gleichgewichtszustand. Somit entspricht die Simulation der Dekade 79-89 eher dem Zustand in der Praxis als die gleichgewichtige Simulation. Wird die empirische Stichprobenmobilität aus Stichproben geschätzt, welche nicht den Gleichgewichtszustand repräsentieren, dann weichen diese Schätzungen systematisch vom wahren Gleichgewichtsindex ab. Die empirische Mobilität der Stichproben der Dekade 79-89 konvergiert mit steigendem Stichprobenumfang nicht gegen die Gleichgewichtsmobilität, sondern gegen den Indexwert  $M_F(P_{\text{wahr}}, m_{1979})$ , welcher die Auswertung des Mobilitätsfunktionalis  $F$  bei der beobachteten Anfangsverteilung  $m_{1979}$  darstellt.

Wird entlang des Einkommenspfaads eines Individuums eine Abweichung der empirischen von der gleichgewichtigen Mobilität festgestellt, dann befindet sich dieses Individuum auf einem Pfaad grosser Abweichungen (vergleiche Kapitel 3). Der Schwellenwert zur Bestimmung der entsprechenden Periodenmobilität entspräche gerade der empirischen Mobilität. Die empirische Mobilität gibt somit den Schwellenwert vor, bei welchem die korrespondierende Periodenmobilität für dieses Individuum berechnet werden sollte. Analog zu diesem Vorgehen kann nun die empirische Stichprobenmobilität als Schwellenwert vorgegeben werden, bei welchem die Periodenmobilität für die entsprechende Stichprobe berechnet werden soll. Da in jeder Stichprobe die empirische Stichprobenmobilität implizit vorhanden und auch berechenbar ist, wird die so bestimmte Periodenmobilität implizite Periodenmobilität genannt. Durch diese Art des Vorgehens lässt sich das Entscheidproblem eliminieren, welches bei der Bestimmung der Periodenmobilität bei der Wahl des entsprechenden Schwellenwerts sonst immer präsent ist. Da die Rangfolge von Übergangsdynamiken bei einem Vergleich ihrer Periodenmobilität vom gewählten Schwellenwert abhängig sein kann, führt diese Art des Vorgehens zur Elimination der mit der Festlegung des Schwellenwerts verbundenen Willkür.

Für den durch die empirische Stichprobenmobilität festgelegten Schwellenwert lässt sich ohne weiteres die korrespondierende Periodenmobilität berechnen, welche implizit in den Daten vorhanden ist. Dies wurde für die ursprünglichen Stichproben-

dynamiken und die optimal an die wahren Einkommensverteilungen angepassten Dynamiken der Dekade 1979 bis 1989 auch getan. So konnte die Methode der Minimierung der relativen Entropie auch unter dem Aspekt der impliziten Periodenmobilität auf ihre Wirksamkeit überprüft werden. Wie bei der Gleichgewichtsmobilität zeigt sich auch hier, dass die ermittelten 95%-Vertrauensintervalle für die Verteilung des Mittelwerts der impliziten Periodenmobilität bei den optimal adjustierten Dynamiken durchwegs kleiner ausfallen als bei den Stichprobendynamiken. Die Konfidenzintervalle werden durch die Anpassung der Stichprobendynamiken an die wahren Einkommensverteilungen der Dekade 79-89 sogar deutlich verkleinert (um Faktoren!). Die Streuung der Indexwerte wird somit stark verringert. Etwas weniger deutlich als bei den Gleichgewichtsindices wirkt sich die Methode der Minimierung der relativen Entropie auf die Signifikanzen aus. Auch hier resultieren in einigen Fällen signifikante Verbesserungen der Schätzungen der impliziten Periodenmobilität, es sind jedoch weniger Fälle als bei den Gleichgewichtsindices. Im Lichte der stark verkleinerten Vertrauensintervalle sind die Verbesserungen der Schätzungen jedoch mindestens so eindrucksvoll wie bei den Gleichgewichtsindices.<sup>110</sup>

Für empirische Studien zur Einkommensdynamik lässt sich das folgende Fazit aus den Resultaten der Monte-Carlo Studie ziehen. In einer Situation, in der für die zu betrachtende Periode sowohl auf Paneldaten als auch auf umfangreichere Querschnittsdaten zurückgegriffen werden kann, empfiehlt es sich, die aus den Paneldaten geschätzte Dynamik an die aus den Querschnittsdaten geschätzten Einkommensverteilungen mittels Minimierung der relativen Entropie anzupassen. Die zum Teil signifikanten Verbesserungen der Schätzung der Gleichgewichts- wie auch der impliziten Periodenmobilität sprechen deutlich dafür, die in den Einkommensquerschnitten vorhandene zusätzliche Information über die wahren Einkommensvertei-

---

<sup>110</sup> Bei um Faktoren kleineren Vertrauensbereichen muss der Mittelwert der Schätzungen natürlich entsprechend näher an den wahren Indexwert zu liegen kommen, damit sich letzterer noch innerhalb des Konfidenzintervalls befindet und sich somit nicht signifikant vom Mittelwert der Schätzungen unterscheidet. Führt die Methode der Minimierung der relativen Entropie in Fällen, wo die Konfidenzintervalle der ursprünglichen Stichprobendynamiken die wahren Indexwerte nicht enthalten, dazu, dass die um Faktoren kleineren Vertrauensbereiche der optimal adjustierten Dynamiken die wahren Indexwerte umfassen, dann sind diese Verbesserungen natürlich umso eindrucklicher.

lungen in die Schätzung der Einkommensdynamik zu integrieren. In der hier durchgeführten Monte-Carlo Simulationsstudie waren die Stichproben das Resultat perfekter Zufallsauswahlen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die durch die Methode der Minimierung der relativen Entropie erzielten Verbesserungen der Mobilitätsmessung sogar noch deutlicher ausfallen dürften, sobald die Stichproben nicht mehr durch perfekte Zufallsprozesse erhoben werden. Neben der Tatsache, dass die optimal angepassten Dynamiken im Sinne der relativen Entropie immer näher bei der wahren Einkommensdynamik liegen als die korrespondierenden ursprünglichen Hypothesen, liefert die Verbesserung der Mobilitätsmessung somit eine zusätzliche Rechtfertigung dafür, für Untersuchungen der Einkommensdynamik auch dann die optimal adjustierte Übergangsmatrix zu verwenden, wenn die notwendigen Anpassungen an die beobachteten Einkommensquerschnitte im statistischen Sinne nicht signifikant ausfallen sollten.

### **III ANHANG UND REFERENZEN**





## 9 ANHANG

### 9.1 ERLÄUTERUNGEN ZUM KONZEPT DER RELATIVEN ENTROPIE

#### 9.1.1 Einleitung

Im Verlaufe von Abschnitt 9.1 soll ein besseres Verständnis für zentrale Begriffe wie *relative Entropie* und *grosse Abweichungen* erarbeitet werden. In dieser Arbeit wurde aufgezeigt, wie die Theorie grosser Abweichungen gewinnbringend in Teilgebiete der Ökonomie eingebracht werden kann. Hier sollen nun die in Kapitel 2 erläuterten und in den Folgekapiteln angewandten Konzepte grosser Abweichungen respektive der relativen Entropie anhand einfacher Beispiele näher gebracht werden. Es soll hier ein intuitiveres Verständnis für die verwendete Methodik erarbeitet werden, welches es auch ohne vollständiges Begreifen der komplizierteren Mathematik in den vorangegangenen Kapiteln ermöglicht, die wesentlichen Errungenschaften der vorgeschlagenen Methode zu verstehen.

Zunächst folgen jedoch noch die Beweise für die Konvexität der Mengen  $\bar{\mathbf{D}}$  und  $\bar{\mathbf{D}}_{\text{mod}}(\mathbf{P}_{\text{mod}})$  sowie die Herleitung der relativen Entropie als Grenzwert des in Kapitel 2 erörterten wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatzes. Zudem wird der Lagrange-Ansatz (2-10) gelöst, was zur Lösung des Minimierungsproblems (2-9) und somit zur optimal an die beobachteten Querschnittsverteilungen angepassten Einkommensdynamik führt. Danach wird anhand eines einfachen wahrscheinlichkeitstheoretischen Zahlenbeispiels die Asymptotik grosser Abweichungen erarbeitet. Es wird so aufgezeigt, wie sich eine Hypothese über die Einkommensdynamik optimal an die zu zwei Zeitpunkten beobachteten Einkommensverteilungen anpassen lässt. Es wird auch illustriert, wie dieser Anpassungsprozess dazu führt, dass die angepasste Hypothese immer eine Verbesserung der ursprünglichen Hypothese in dem Sinne bedeutet, dass erstere näher bei der unbeobachtbaren wahren Dynamik liegt. Zum Schluss wird je eine Realisation der Webseiten [http://www.stp.dias.ie/APG/coin\\_tossing.html](http://www.stp.dias.ie/APG/coin_tossing.html) und [.../rate\\_function.html](http://www.stp.dias.ie/APG/rate_function.html) des Dublin Institute for Advanced Studies gezeigt. Auf diesen Webseiten wird versucht, den Begriff der grossen Abweichungen anhand von Münzwurfexperimenten näher zu bringen.

## 9.1.2 Beweise und Herleitungen

### 9.1.2.1 Konvexität von $\bar{\mathbf{D}}$

THEOREM: Die Menge  $\bar{\mathbf{D}}$  aller zweidimensionalen Dichtematrizen  $D$ , welche die Kontinuitätsrestriktionen (2-1) erfüllen, ist konvex.

BEWEIS: Die beiden zweidimensionalen Dichtematrizen  $D_1$  und  $D_2$  seien Element der Menge  $\bar{\mathbf{D}}$  und erfüllen somit die Kontinuitätsrestriktionen. Für jede beliebige Linearkombination  $D = \alpha \cdot D_1 + (1-\alpha) \cdot D_2$  mit  $\alpha \in [0,1]$  gilt:

$$\begin{aligned} D \cdot \mathbf{1} &= [\alpha \cdot D_1 + (1-\alpha) \cdot D_2] \cdot \mathbf{1} = \alpha \cdot D_1 \cdot \mathbf{1} + (1-\alpha) \cdot D_2 \cdot \mathbf{1} = \alpha \cdot m_t + (1-\alpha) \cdot m_t \\ &= m_t \cdot [\alpha + (1-\alpha)] = m_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D' \cdot \mathbf{1} &= [\alpha \cdot D_1' + (1-\alpha) \cdot D_2'] \cdot \mathbf{1} = \alpha \cdot D_1' \cdot \mathbf{1} + (1-\alpha) \cdot D_2' \cdot \mathbf{1} = \alpha \cdot m_{t+1} + (1-\alpha) \cdot m_{t+1} \\ &= m_{t+1} \cdot [\alpha + (1-\alpha)] = m_{t+1} \end{aligned}$$

Somit ist auch jede beliebige Linearkombination von  $D_1$  und  $D_2$  ein Element der Menge  $\bar{\mathbf{D}}$ , was gleichbedeutend mit der Konvexität von  $\bar{\mathbf{D}}$  ist.

**q.e.d.**

### 9.1.2.2 Konvexität von $\bar{\mathbf{D}}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}})$

THEOREM: Die Menge  $\bar{\mathbf{D}}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}}) = \{D \mid D = \text{diag}(\mu) \cdot P_{\text{mod}} \text{ und } \mu \gg 0\}$  ist konvex. Es handelt sich dabei um die Menge aller zweidimensionalen Dichtematrizen  $D$ , welchen dieselbe Übergangsmatrix  $P_{\text{mod}}$  zugrunde liegt.

BEWEIS: Die beiden zweidimensionalen Dichtematrizen  $D_1 = \text{diag}(\mu_1) \cdot P_{\text{mod}}$  und  $D_2 = \text{diag}(\mu_2) \cdot P_{\text{mod}}$  mit  $\mu_1 \neq \mu_2$  seien Element der Menge  $\bar{\mathbf{D}}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}})$ . Für jede beliebige Linearkombination  $D = \alpha \cdot D_1 + (1-\alpha) \cdot D_2$  mit  $\alpha \in [0,1]$  gilt:

$$\begin{aligned} D &= \alpha \cdot D_1 + (1-\alpha) \cdot D_2 = \alpha \cdot \text{diag}(\mu_1) \cdot P_{\text{mod}} + (1-\alpha) \cdot \text{diag}(\mu_2) \cdot P_{\text{mod}} \\ &= [\text{diag}(\alpha \cdot \mu_1) + \text{diag}((1-\alpha) \cdot \mu_2)] \cdot P_{\text{mod}} \\ &= \text{diag}(\underbrace{\alpha \cdot \mu_1 + (1-\alpha) \cdot \mu_2}_{\mu}) \cdot P_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu) \cdot P_{\text{mod}} \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mu$  ein positiver Vektor mit  $\sum_i \mu_i = 1$  und somit ein Dichtevektor. Da die Menge  $\bar{\mathbf{D}}_{\text{mod}}(\mathbf{P}_{\text{mod}})$  alle zweidimensionalen Dichten enthält, welche mit der Übergangsmatrix  $\mathbf{P}_{\text{mod}}$  und allen positiven Dichten  $\mu$  gemäss  $\text{diag}(\mu) \cdot \mathbf{P}_{\text{mod}}$  gebildet werden können (vergleiche Abschnitt 2.4), gilt somit  $D \in \bar{\mathbf{D}}_{\text{mod}}(\mathbf{P}_{\text{mod}})$ .

**q.e.d.**

### 9.1.2.3 Grenzwert der Realisationswahrscheinlichkeit von Einkommensgeschichten

$$\Pr_N(\Gamma | \mathbf{D}_{\text{mod}}) = N! \cdot \prod_{i,j=1}^K \frac{(d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{ij}}}{\gamma_{ij}!} \quad \left| \quad \log \right.$$

$$\log \Pr_N(\Gamma | \mathbf{D}_{\text{mod}}) = \log N! + \sum_{i,j=1}^K \gamma_{ij} \cdot \log d_{\text{mod},ij} - \sum_{i,j=1}^K \log \gamma_{ij}!$$

Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot (1 + \varepsilon_n)$$

mit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  wenn  $n \rightarrow \infty$

$$\log \Pr_N(\Gamma | \mathbf{D}_{\text{mod}})$$

$$= \log \left[ \left(\frac{N}{e}\right)^N \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot (1 + \varepsilon_N) \right] + \sum_{i,j=1}^K \gamma_{ij} \cdot \log d_{\text{mod},ij} - \sum_{i,j=1}^K \log \left[ \left(\frac{\gamma_{ij}}{e}\right)^{\gamma_{ij}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \gamma_{ij}} \cdot (1 + \varepsilon_{\gamma_{ij}}) \right]$$

$$= \log \left(\frac{N}{e}\right)^N + \log \left[ \sqrt{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot (1 + \varepsilon_N) \right] + \sum_{i,j=1}^K N \cdot d_{ij} \cdot \log d_{\text{mod},ij} - \sum_{i,j=1}^K \log \left(\frac{N \cdot d_{ij}}{e}\right)^{N \cdot d_{ij}} - \sum_{i,j=1}^K \log \left[ \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \gamma_{ij}} \cdot (1 + \varepsilon_{\gamma_{ij}}) \right]$$

$$= N \cdot \log \left(\frac{N}{e}\right) + \log \left[ \sqrt{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot (1 + \varepsilon_N) \right] + N \cdot \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log d_{\text{mod},ij} - \sum_{i,j=1}^K N \cdot d_{ij} \cdot \left( \log \left(\frac{N}{e}\right) + \log d_{ij} \right) - \sum_{i,j=1}^K \log \left[ \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \gamma_{ij}} \cdot (1 + \varepsilon_{\gamma_{ij}}) \right]$$

$$= N \cdot \log \left(\frac{N}{e}\right) + \log \left[ \sqrt{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot (1 + \varepsilon_N) \right] + N \cdot \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log d_{\text{mod},ij} - N \cdot \log \left(\frac{N}{e}\right) \cdot \underbrace{\sum_{i,j=1}^K d_{ij}}_{=1}$$

$$- N \cdot \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log d_{ij} - \sum_{i,j=1}^K \log \left[ \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \gamma_{ij}} \cdot (1 + \varepsilon_{\gamma_{ij}}) \right]$$

$$= -N \cdot \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}} + \log [\sqrt{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot (1 + \varepsilon_N)] - \sum_{i,j=1}^K \log [\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \gamma_{ij}} \cdot (1 + \varepsilon_{\gamma_{ij}})] \quad \left| \cdot \frac{1}{N} \right.$$

$$\frac{1}{N} \cdot \log \Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}})$$

$$= -\sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}} + \underbrace{\frac{\log [\sqrt{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot (1 + \varepsilon_N)] - \sum_{i,j=1}^K \log [\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \gamma_{ij}} \cdot (1 + \varepsilon_{\gamma_{ij}})]}{N}}_{\text{strebt gegen 0 für } N \rightarrow \infty}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \log \Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}}) = -\sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}} = -H(D | D_{\text{mod}})$$

#### 9.1.2.4 Lösung des Optimierungsproblems

$$L = \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \left( \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}} \right) - \sum_{i=1}^K \lambda_{t,i} \cdot \left( \sum_{j=1}^K d_{ij} - m_{t,i} \right) - \sum_{j=1}^K \lambda_{t+1,j} \cdot \left( \sum_{i=1}^K d_{ij} - m_{t+1,j} \right)$$

1. Die optimal an die beobachteten Einkommensverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  angepasste Dynamik  $D_{\text{opt}}$  wird durch Differenzierung der Lagrange-Funktion  $L$  hinsichtlich  $d_{ij}$  und durch Gleichsetzen der resultierenden Ableitungen mit Null erhalten (Bedingungen erster Ordnung):

$$\frac{\partial L}{\partial d_{ij}} = \log \left( \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}} \right) + d_{ij} \cdot \frac{d_{\text{mod},ij}}{d_{ij}} \cdot \frac{1}{d_{\text{mod},ij}} - \lambda_{t,i} - \lambda_{t+1,j} = \log \left( \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}} \right) + 1 - \lambda_{t,i} - \lambda_{t+1,j} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \log \left( \frac{d_{\text{opt},ij}}{d_{\text{mod},ij}} \right) = \lambda_{t,i} + \lambda_{t+1,j} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{d_{\text{opt},ij}}{d_{\text{mod},ij}} = e^{\lambda_{t,i} + \lambda_{t+1,j} - 1} = e^{\lambda_{t,i}} \cdot e^{\lambda_{t+1,j} - 1}$$

$$\Rightarrow d_{\text{opt},ij} = e^{\lambda_{t,i}} \cdot d_{\text{mod},ij} \cdot e^{\lambda_{t+1,j} - 1} = \phi_{t,i} \cdot d_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} \quad \forall i,j \in \{1, \dots, K\},$$

$$\text{mit } \phi_{t,i} = e^{\lambda_{t,i}} \quad \text{und } \phi_{t+1,j} = e^{\lambda_{t+1,j} - 1}.$$

2. Die Schrödingermultiplikatoren werden durch Differenzierung der Lagrange-Funktion  $L$  nach den Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{t,i}$  respektive  $\lambda_{t+1,j}$  sowie anschlies-

sendem Nullsetzen der daraus folgenden Ableitungen gewonnen (Bedingungen erster Ordnung). Das resultierende Gleichungssystem wird Schrödinger-System genannt:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{t,i}} = m_{t,i} - \sum_{j=1}^K d_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow m_{t,i} = \sum_{j=1}^K d_{opt,ij} = \sum_{j=1}^K \phi_{t,i} \cdot d_{mod,ij} \cdot \phi_{t+1,j} = \phi_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K d_{mod,ij} \cdot \phi_{t+1,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{t+1,j}} = m_{t+1,j} - \sum_{i=1}^K d_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow m_{t+1,j} = \sum_{i=1}^K d_{opt,ij} = \sum_{i=1}^K \phi_{t,i} \cdot d_{mod,ij} \cdot \phi_{t+1,j} = \phi_{t+1,j} \cdot \sum_{i=1}^K \phi_{t,i} \cdot d_{mod,ij} \quad \forall j \in \{1, \dots, K\}.$$

### 9.1.3 Illustration

#### 9.1.3.1 Realisationswahrscheinlichkeiten von Einkommengeschichten

Die Grundlagen wurden in Abschnitt 2.2 ausführlich dargestellt. Um die Methode der Minimierung der relativen Entropie anwenden zu können, muss eine Beobachtung der Einkommensverteilungen zu zwei Zeitpunkten (t und t+1) sowie eine Hypothese über die Dynamik des Einkommensprozesses vorhanden sein. Letzteres deshalb, weil die wahre Einkommensdynamik normalerweise unbekannt ist und folglich geschätzt werden muss. Beobachtung und Hypothese sind die erforderlichen Ingredienzien zur Anwendung der vorgeschlagenen Methodik. In diesem Abschnitt wird von der folgenden konstruierten Situation ausgegangen:

- **BEOBACHTUNG:** Die Einkommensverteilungen der Grundgesamtheit von N unabhängigen, unterscheidbaren Individuen zu zwei Zeitpunkten seien bekannt,

$$m_t = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad m_{t+1} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Randverteilungen führen zur konvexen Menge  $\bar{D}$  aller Einkommensdynamiken D, deren Zeilen- respektive Spaltensummen mit  $m_t$  respektive  $m_{t+1}$  übereinstimmen (vergleiche hierzu auch Abbildung 9-2).

- HYPOTHESE: Die vermutete Dynamik des Einkommensprozesses<sup>111</sup> (Modelldynamik)  $D_{\text{mod}}$  sei gegeben durch

$$D_{\text{mod}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = (d_{\text{mod},ij})_{i,j=1,2}, \quad D_{\text{mod}} \notin \bar{\mathbf{D}}.$$

Für alle Elemente  $D$  der konvexen Menge  $\bar{\mathbf{D}}$  gilt somit, dass sie die als *Anfangs- und Endrestriktionen (Kontinuitätsrestriktionen)* bekannten Bedingungen erfüllen:

$$(9-1) \quad \sum_{j=1}^2 d_{ij} = m_{t,i} \quad \forall i = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^2 d_{ij} = m_{t+1,j} \quad \forall j = 1,2.$$

Da  $\sum_i m_{t,i} = 1$  und  $\sum_j m_{t+1,j} = 1$  sind, implizieren die obigen Bedingungen  $2 \cdot K - 2$  Restriktionen für  $D$ . Hier sind dies folglich 2 Restriktionen. Kompakter in Matrixnotation geschrieben lauten die Kontinuitätsrestriktionen, wobei die beiden Darstellungen äquivalent sind, wie folgt:

$$(9-1)' \quad \begin{matrix} D \cdot \mathbf{1} = m_t \\ D' \cdot \mathbf{1} = m_{t+1} \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad D \in \bar{\mathbf{D}}.$$

Im Beispiel bedeuten die Anfangs- und Endrestriktionen (9-1) somit:

$$\begin{pmatrix} d_{11} + d_{12} \\ d_{21} + d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \quad \text{respektive} \quad \begin{pmatrix} d_{11} + d_{21} \\ d_{12} + d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Implizit wird hier davon ausgegangen, dass beim Übergang von  $t$  nach  $t+1$  niemand verloren geht oder hinzu kommt. Für die Begründung dieser Annahme sei auf Abschnitt 2.3 verwiesen. Da die wahre Einkommensdynamik normalerweise nicht beobachtet werden kann und die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  im allgemeinen mit den beobachteten Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  nicht kompatibel ist, muss die unbekannte Einkommensdynamik aus der Beobachtung und der Hypothese heraus geschätzt werden.

---

<sup>111</sup> Diese Hypothese kann der Theorie entstammen oder aus empirischen Studien entnommen werden. Sie sollte jedoch immer gut begründet sein. Auf diese Problematik wurde in den Kapiteln 5 bis 8 näher eingegangen. Wird für alle  $i,j$   $d_{\text{mod},ij} = 1/K^2$  gewählt, dann enthält die Hypothese keine zusätzliche Information (non-informative prior).

Die Lösung dieser Abschätzung, die optimal angepasste zweidimensionale Dichte  $D_{\text{opt}}$ , erfüllt dann die Anfangs- und Endrestriktionen.

Im vorliegenden Beispiel wird jedoch aus Gründen der Illustration zunächst davon ausgegangen, dass die wirkliche Einkommensdynamik bekannt ist. Die "wahre" Einkommensdynamik ist in den meisten Fällen nicht bekannt, sie ist jedoch oft das Ziel empirischer Forschung.

- ANNAHME: Die "wahre" Einkommensdynamik sei durch die "unbekannte" zweidimensionale Dichtematrix  $D_{\text{wahr}}$  mit den Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  gegeben:

$$D_{\text{wahr}} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = (d_{\text{wahr},ij})_{i,j=1,2}, \quad D_{\text{wahr}} \in \bar{\mathbf{D}}.$$

Bestünde die Möglichkeit, das Einkommen jedes der  $N$  Individuen im Zeitablauf zu verfolgen, dann liesse sich abzählen, wie viele Personen sich in Periode  $t$  in Einkommensklasse  $i$  und im Zeitabschnitt  $t+1$  in Einkommensklasse  $j$  befinden. Diese Zahlen werden mit  $\gamma_{\text{wahr},ij}$  bezeichnet und in einer  $(K \times K)$ -Matrix geordnet:

$$\Gamma_{\text{wahr}} = (\gamma_{\text{wahr},ij})_{i,j=1,\dots,K} \quad \text{mit} \quad \Gamma_{\text{wahr}} = N \cdot D_{\text{wahr}}.$$

Diese Matrix wird im folgenden Einkommensgeschichte genannt. Solche Matrizen, welche die absoluten Häufigkeiten enthalten, sind im allgemeinen als Kontingenztabelle bekannt. Es existieren unendlich viele Einkommensgeschichten die mit den Kontinuitätsrestriktionen (9-1) kompatibel sind. Um die dem Konzept grosser Abweichungen innewohnende Asymptotik zu erläutern werden von nun an zwei Fälle unterschieden, welche beide mit (9-1) verträglich sind:

- I. Die "wahre" Einkommensdynamik  $D_{\text{wahr}}$  werde durch eine Grundgesamtheit von  $N_1 = 10$  Individuen generiert.
- II. Die "wahre" Einkommensdynamik  $D_{\text{wahr}}$  werde durch eine Grundgesamtheit von  $N_2 = 100$  Individuen generiert.

Dadurch ergeben sich zwei "wahre" Einkommensgeschichtematrizen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ . Beiden liegt dieselbe Dynamik  $D_{\text{wahr}}$  zugrunde.

- $\Gamma_1 = (\gamma_{1,ij})_{i,j=1,2} = N_1 \cdot D_{\text{wahr}} = 10 \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\bullet \Gamma_2 = (\gamma_{2,ij})_{i,j=1,2} = N_2 \cdot D_{\text{wahr}} = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

Durch die Anwendung elementarer Kombinatorik lässt sich berechnen, auf wieviele unterschiedliche Arten sich die Geschichte  $\Gamma_1$  mit  $N_1$  unterscheidbaren Individuen realisieren lässt. Diese Anzahl wird mit  $n(\Gamma_1)$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} (9-2) \quad n(\Gamma_1) &= \binom{N_1}{\gamma_{1,11}} \cdot \binom{N_1 - \gamma_{1,11}}{\gamma_{1,12}} \cdot \binom{N_1 - \gamma_{1,11} - \gamma_{1,12}}{\gamma_{1,21}} \cdot \binom{N_1 - \gamma_{1,11} - \gamma_{1,12} - \gamma_{1,21}}{\gamma_{1,22}} = \frac{N_1!}{\prod_{i,j=1}^2 \gamma_{1,ij}!} \\ &= \binom{10}{4} \cdot \binom{10-4}{2} \cdot \binom{10-4-2}{1} \cdot \binom{10-4-2-1}{3} \\ &= \frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = 12'600 . \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass  $\Gamma_1$  mit 10 unterscheidbaren Individuen auf insgesamt 12'600 Arten realisiert werden kann. Für die Geschichte  $\Gamma_2$  mit  $N_2$  unterscheidbaren Individuen ergibt sich die folgende Anzahl unterscheidbarer Realisationen:

$$\begin{aligned} (9-2)' \quad n(\Gamma_2) &= \binom{N_2}{\gamma_{2,11}} \cdot \binom{N_2 - \gamma_{2,11}}{\gamma_{2,12}} \cdot \binom{N_2 - \gamma_{2,11} - \gamma_{2,12}}{\gamma_{2,21}} \cdot \binom{N_2 - \gamma_{2,11} - \gamma_{2,12} - \gamma_{2,21}}{\gamma_{2,22}} = \frac{N_2!}{\prod_{i,j=1}^2 \gamma_{2,ij}!} \\ &= \binom{100}{40} \cdot \binom{100-40}{20} \cdot \binom{100-40-20}{10} \cdot \binom{100-40-20-10}{30} \\ &= \frac{100!}{10! \cdot 20! \cdot 30! \cdot 40!} = 4.8844 \cdot 10^{52} . \end{aligned}$$

Es soll nun die Wahrscheinlichkeit für die Realisation beider Einkommensgeschichten berechnet werden wie wenn davon ausgegangen würde, dass sie unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  und nicht unter der "wahren" Dynamik  $D_{\text{wahr}}$  zustande gekommen wären. In einem ersten Schritt werden zunächst für beide Fälle die Realisierungswahrscheinlichkeiten je einer spezifischen  $\Gamma$ -Matrix berechnet. Wie bei Multinomialverteilungen üblich berechnet sich die Wahrscheinlichkeit der Realisation einer spezifischen  $\Gamma_1$ -Matrix aus den 12'600 Möglichkeiten unter der Modelldynamik  $D_{\text{mod}}$  wie folgt:



$$(9-3) \quad \Pr(\Gamma_1) = \prod_{i,j=1}^2 (d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{1,ij}} = 0.5^4 \cdot 0.1^2 \cdot 0.2^1 \cdot 0.2^3 = 0.000001 .$$

Analog berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine spezifische  $\Gamma_2$ -Matrix aus den  $4.8844 \cdot 10^{52}$  Möglichkeiten unter der Dynamik  $D_{\text{mod}}$  realisiert wird gemäss:

$$(9-3)' \quad \Pr(\Gamma_2) = \prod_{i,j=1}^2 (d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{2,ij}} = 0.5^{40} \cdot 0.1^{20} \cdot 0.2^{10} \cdot 0.2^{30} = 1 \cdot 10^{-60} .$$

Makroökonomisch besteht nur ein Interesse daran, dass eine Einkommensverteilung so ist wie sie ist, und nicht daran, wer sich wo in der Verteilung befindet. Deshalb interessiert nicht die Wahrscheinlichkeit für die Realisation einer spezifischen  $\Gamma$ -Matrix als vielmehr wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass überhaupt eine  $\Gamma$ -Matrix unter der Hypothese realisiert wird. Im Fall der Einkommensgeschichte  $\Gamma_1$  interessiert folglich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgend eine der insgesamt 12'600  $\Gamma_1$ -Matrizen unter der Dynamik  $D_{\text{mod}}$  realisiert wird. Diese Realisationswahrscheinlichkeit ergibt sich somit durch Multiplikation der Gleichungen (9-2) und (9-3) zu:

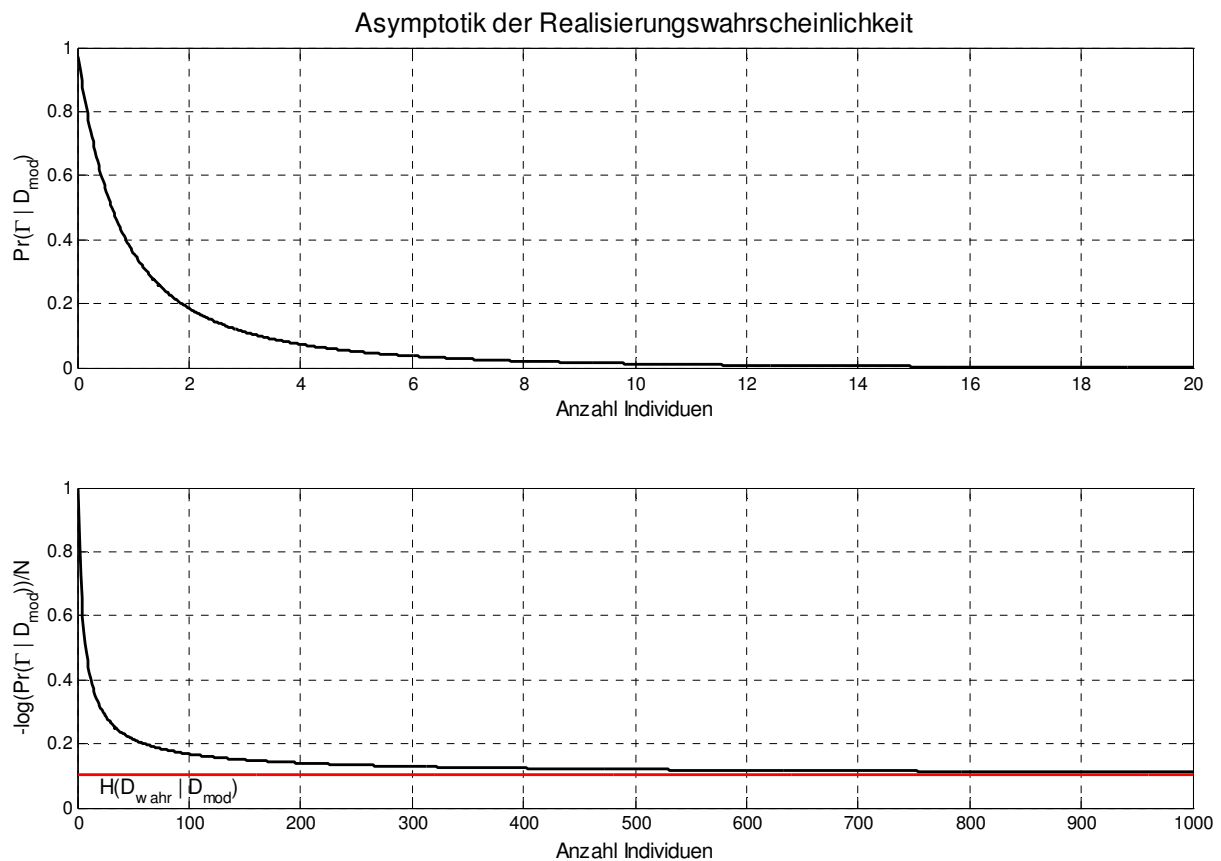
$$(9-4) \quad \Pr_{N_1}(\Gamma_1 | D_{\text{mod}}) = n(\Gamma_1) \cdot \Pr(\Gamma_1) = N_1! \cdot \prod_{i,j=1}^2 \frac{(d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{1,ij}}}{\gamma_{1,ij}!} = 0.0126 .$$

Im Falle der  $\Gamma_2$ -Einkommensgeschichte resultiert die folgende Realisationswahrscheinlichkeit:

$$(9-4)' \quad \Pr_{N_2}(\Gamma_2 | D_{\text{mod}}) = n(\Gamma_2) \cdot \Pr(\Gamma_2) = N_2! \cdot \prod_{i,j=1}^2 \frac{(d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{2,ij}}}{\gamma_{2,ij}!} = 0.00000004884 .$$

Der Vergleich der Gleichungen (9-4) und (9-4)' liefert einen Hinweis dafür, wie schnell die Realisierungswahrscheinlichkeit  $\Pr_{N}(\Gamma | D_{\text{mod}})$  einer Einkommensgeschichte  $\Gamma$ , die unter der "wahren" Dynamik  $D_{\text{wahr}}$  zustande gekommenen ist, unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  für  $N \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt. Für  $N_1 = 10$  beträgt sie immerhin noch 1.26 %, für  $N_2 = 100$  ist sie kaum mehr der Rede wert. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Realisationswahrscheinlichkeit gegen 0 für  $N \rightarrow \infty$  ist, zumindest für das hier gewählte Beispiel, sehr hoch. Dies ist in Abbildung 9-1 grafisch dargestellt. Während in der oberen Teilgrafik die Konvergenz der Realisierungswahrscheinlichkeit gegen 0

für  $N \rightarrow \infty$  dargestellt ist, zeigt der untere Teil der Abbildung die Konvergenz der Konvergenzrate der Realisationswahrscheinlichkeit einer wahren Einkommensgeschichte  $\Gamma_{\text{wahr}}$  unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  gegen ihren Grenzwert, welcher, wie weiter unten noch ausgeführt wird, durch die relative Entropie  $H(D_{\text{wahr}}|D_{\text{mod}})$  gegeben ist.



**Abbildung 9-1:** Asymptotik von  $D_{\text{wahr}}$  bei gegebener Hypothese  $D_{\text{mod}}$

Formal lautet die Realisationswahrscheinlichkeit für irgend eine  $(K \times K)$ -Einkommensgeschichte  $\Gamma$  unter einer Hypothese  $D_{\text{mod}}$  wie folgt:

$$(9-5) \quad \Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}}) = N! \cdot \prod_{i,j=1}^K \frac{(d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{ij}}}{\gamma_{ij}!} .$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit von  $\Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}}) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$  wird im folgenden von grossem Interesse sein da ihre Bestimmung der Schlüssel dafür ist, die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  optimal an die beobachteten Randverteilungen anzupassen.

### 9.1.3.2 Optimierungsproblem

Wie beim Vergleich der Resultate der Gleichungen (9-4) und (9-4)' angedeutet, besagt das Gesetz der grossen Zahlen, dass jede mit den beobachteten Randverteilungen kompatible Einkommensgeschichtematrix aus dem Blickwinkel der Hypothese die Realisationswahrscheinlichkeit 0 hat, wenn  $N$  gegen unendlich strebt. Formal bedeutet dies  $\Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}}) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ . Dies deshalb, weil  $\Gamma$  respektive die korrespondierende zweidimensionale Dichte  $D$  die Kontinuitätsrestriktionen (9-1) erfüllt, die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  hingegen nicht.

Hier ist es nun an der Zeit, die Optik wieder der eigentlichen Problemstellung zuzuwenden. Während oben die Realisationswahrscheinlichkeit der beiden "wahren" Einkommensgeschichten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  berechnet wurde, um zu demonstrieren, dass diese sehr schnell mit steigendem  $N$  gegen 0 strebt, soll nun die unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  wahrscheinlichste Dynamik  $D_{\text{opt}}$  berechnet werden. Hier sei nochmals erwähnt, dass die wahre Dynamik  $D_{\text{wahr}}$  unbekannt ist, davon ist nur gewiss, dass sie mit den beobachteten Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  kompatibel sein muss. Dies ist gleichbedeutend damit, dass sowohl  $D_{\text{opt}}$  wie auch die unbekanntete Dichte  $D_{\text{wahr}}$  Element der konvexen Menge  $\bar{\mathbf{D}}$  sind.

Die Hypothese ist ja eine irgendwie zu begründende erste Idee über den unbekanntenen dynamischen Prozess. Aus Sicht dieser Hypothese gilt es nun, aus der Menge  $\bar{\mathbf{D}}$  der möglichen Lösungen dasjenige Element zu finden, welches mit grösster Wahrscheinlichkeit realisiert wird. Da die Realisierungswahrscheinlichkeit aller Elemente der Lösungsmenge mit steigender Anzahl Individuen  $N$  gegen 0 tendiert, wird dasjenige Element mit grösster Wahrscheinlichkeit realisiert, dessen Realisierungswahrscheinlichkeit für  $N \rightarrow \infty$  mit der niedrigsten Konvergenzrate gegen 0 konvergiert. Wie in Abschnitt 9.1.2.2 gezeigt wurde, ist diese Konvergenzrate durch die relative Entropie  $H(D | D_{\text{mod}})$  gegeben:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \log[\Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}})] = - \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log\left(\frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}}\right) = -H(D | D_{\text{mod}})$$

Die Funktion  $H(\cdot | D_{\text{mod}})$  wird auch Ratenfunktion genannt da die Realisationswahrscheinlichkeit für grosse  $N$  exponentiell mit dieser Rate gegen null konvergiert:

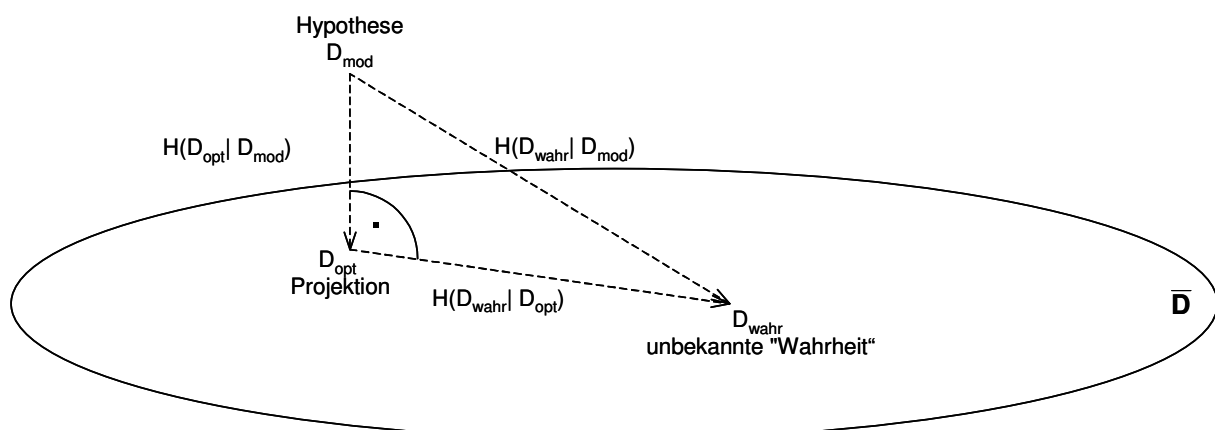
$$(9-6) \quad \Pr_N(\Gamma | D_{\text{mod}}) = N! \prod_{i,j=1}^K \frac{(d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{ij}}}{\gamma_{ij}!} \cong e^{-N H(D|D_{\text{mod}})} .$$

Die relative Entropie besitzt die folgenden Eigenschaften:

- $H(D|D_{\text{mod}}) \geq 0$  ; nichtnegative Funktion von  $D$ .
- $H(D|D_{\text{mod}}) = 0$  dann und nur dann, wenn  $D = D_{\text{mod}}$  .
- $H(D|D_{\text{mod}})$  ist eine konvexe Funktion von  $D$ .
- $H(D|D_{\text{mod}})$  besitzt ein globales Minimum in  $\bar{D}$  .
- $H(D|D_{\text{mod}}) \neq H(D_{\text{mod}}|D)$  ; keine Symmetrie in den Argumenten.

Aus Gleichung (9-6) geht hervor, dass die gesuchte Lösung  $D_{\text{opt}}$  des Problems durch Minimierung der relativen Entropie über alle Elemente der Lösungsmenge  $\bar{D}$  hinsichtlich der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  gefunden wird. Die obigen Eigenschaften der relativen Entropie garantieren die Eindeutigkeit dieser Lösung. Die Lösung ist also durch diejenige zweidimensionale Dichte gegeben, deren Realisationswahrscheinlichkeit mit der langsamsten Rate gegen 0 konvergiert. Hierbei handelt es sich um ein sogenanntes Argument der *grossen Abweichungen*.

Der Übersicht halber sei hier die geometrische Interpretation der relativen Entropie nochmals wiedergegeben.



$\bar{D}$  = konvexe Menge aller zweidimensionalen  $(K \times K)$  – Dichtematrizen  $D$ ,  
welche die Randdichten  $m_t$  und  $m_{t+1}$  besitzen

**Abbildung 9-2:** Geometrische Interpretation der relativen Entropie

Die relative Entropie stellt somit eine Art gerichtetes Distanzmass dar. Unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  ist diejenige Einkommensgeschichte  $\Gamma$  am wahrscheinlichsten, deren Realisierungswahrscheinlichkeit am langsamsten gegen 0 strebt. Um diese unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  wahrscheinlichste Einkommensgeschichte  $\Gamma_{\text{opt}}$  respektive deren zweidimensionale Dichtematrix  $D_{\text{opt}}$  zu finden gilt es, die relative Entropie  $H(D|D_{\text{mod}})$  über alle zweidimensionalen Dichten  $D$  unter den Nebenbedingungen der Kontinuitätsrestriktionen (9-1) zu minimieren:

$$D_{\text{opt}} = \underset{D \in \bar{\mathbf{D}}}{\operatorname{argmin}} H(D | D_{\text{mod}}) = \underset{D \in \bar{\mathbf{D}}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i,j=1}^K d_{ij} \cdot \log \left( \frac{d_{ij}}{d_{\text{mod},ij}} \right).$$

Der gewählten Terminologie folgend wird  $D_{\text{opt}}$  aus Sicht der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  als wahrscheinlichste zweidimensionale Dichtematrix bezeichnet.

Die Anpassungsprozedur liefert für das hier verwendete einfache Beispiel das folgende Resultat:

$$D_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} 0.3911 & 0.2089 \\ 0.1089 & 0.2911 \end{bmatrix} = (d_{\text{opt},ij})_{i,j=1,2}, \quad D_{\text{opt}} \in \bar{\mathbf{D}}$$

Der in Abbildung 9-2 dargestellte "pythagoräische" Zusammenhang zwischen den drei Dichten  $D_{\text{mod}}$ ,  $D_{\text{opt}}$  und  $D_{\text{wahr}}$  ist wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} H(D_{\text{wahr}} | D_{\text{mod}}) &= H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}) + H(D_{\text{wahr}} | D_{\text{opt}}) \\ \Rightarrow \quad 0.10170 &= 0.10089 + 0.00081 \end{aligned}$$

Dabei wird ersichtlich, dass die ursprüngliche Hypothese  $D_{\text{mod}}$  deutlich in die richtige Richtung angepasst wurde. Der Anpassungsprozess korrigiert die Hypothese so, dass die angepasste Dynamik  $D_{\text{opt}}$  deutlich näher beim unbeobachtbaren wahren Prozess  $D_{\text{wahr}}$  zu liegen kommt. Vorausgesetzt, dass die gewählte Hypothese einen vernünftigen Ausgangspunkt darstellt, verdeutlicht dieses Beispiel, dass die Methode der Minimierung der relativen Entropie zur Schätzung von Übergangsdynamiken unter Einbezug von Querschnittsdaten gut geeignet ist.

Werden die einzelnen Iterationsschritte der IPFP-Anpassungsprozedur<sup>112</sup> betrachtet, wird leicht ersichtlich, wie schnell der Anpassungsprozess konvergiert. Aus Abbildung 9-3 geht hervor, dass der iterative Prozess, bei einer Genauigkeit von vier Dezimalstellen, schon nach sechs Iterationen zur optimal angepassten Dichte  $D_{\text{opt}}$  konvergiert. Auch zeigt ein simpler optischer Vergleich der drei Matrizen  $D_{\text{mod}}$ ,  $D_{\text{opt}}$  und  $D_{\text{wahr}}$ , dass die angepasste Hypothese  $D_{\text{opt}}$  sehr viel näher bei der wahren Dynamik  $D_{\text{wahr}}$  liegt als die ursprüngliche Hypothese  $D_{\text{mod}}$ .

$$\begin{aligned}
 D_{\text{mod}} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} 0.3571 & 0.1667 \\ 0.1429 & 0.3333 \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3866 & 0.2027 \\ 0.1134 & 0.2973 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3904 & 0.2081 \\ 0.1096 & 0.2919 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3910 & 0.2088 \\ 0.1090 & 0.2912 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3910 & 0.2089 \\ 0.1090 & 0.2911 \end{bmatrix} \\
 &\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Zwischenschritte}} \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3911 & 0.2089 \\ 0.1089 & 0.2911 \end{bmatrix} = D_{\text{opt}} \\
 &\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = D_{\text{wahr}}
 \end{aligned}$$

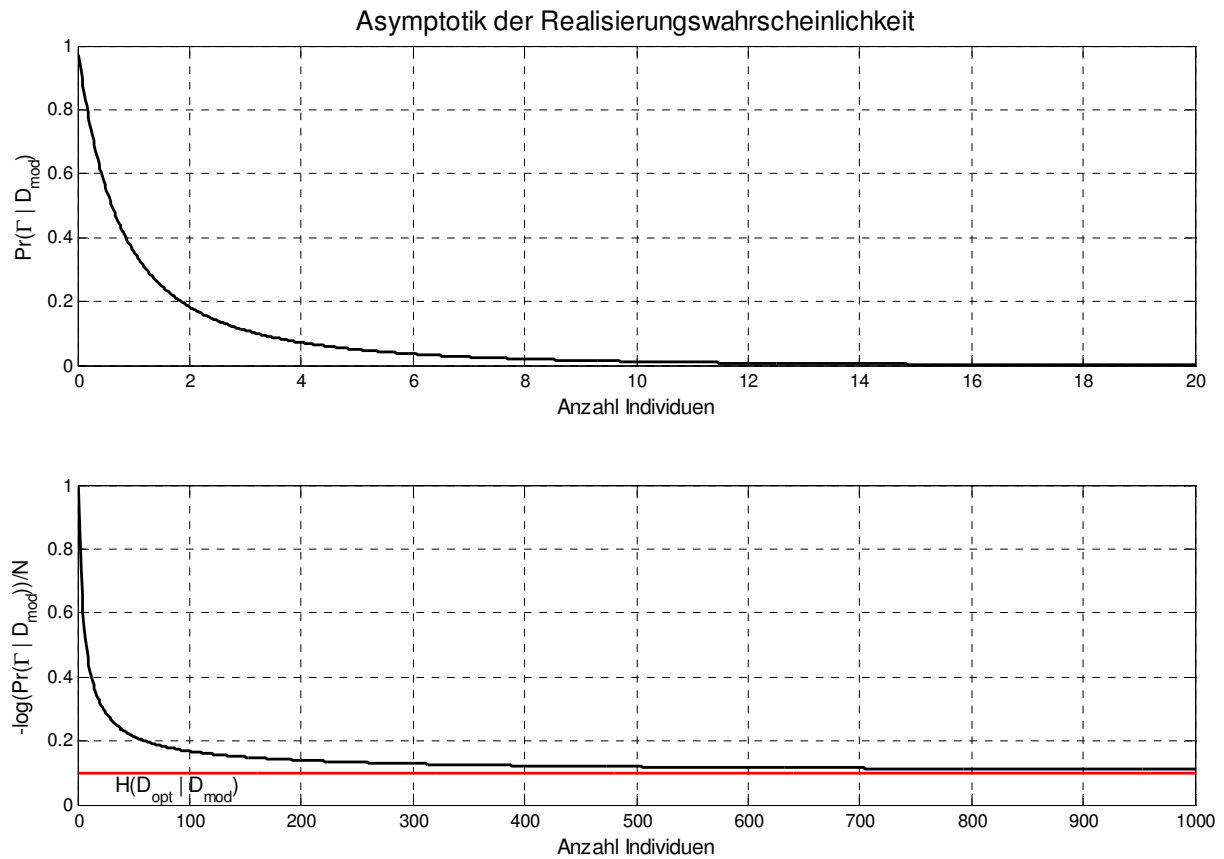
**Abbildung 9-3:** Konvergenz der IPFP-Anpassungsprozedur

Aus der Abbildung geht auch hervor, dass der erste Anpassungsschritt mit Abstand den grössten Teil der Anpassungsleistung erbringt.

In Abbildung 9-4 ist, analog zu Abbildung 9-1, das asymptotische Verhalten der Realisationswahrscheinlichkeit einer optimal an die beobachteten Randverteilungen angepassten Einkommensgeschichte unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  für  $N \rightarrow \infty$  aufgezeigt. Die obere Teilgrafik stellt dabei die Konvergenz der Realisierungswahrscheinlichkeit gegen 0 für  $N \rightarrow \infty$  dar. Die untere Teilgrafik zeigt die Konvergenz der Konvergenzrate der Realisationswahrscheinlichkeit der, unter dem Blickwinkel der Hypo-

<sup>112</sup> Vergleiche Abschnitt 2.3.3 für eine Beschreibung der IPFP-Prozedur.

these, wahrscheinlichsten Einkommensgeschichte gegen ihren Grenzwert, welcher durch die relative Entropie  $H(D_{\text{opt}}|D_{\text{mod}})$  gegeben ist.



**Abbildung 9-4:** Asymptotik von  $D_{\text{opt}}$  bei gegebener Hypothese  $D_{\text{mod}}$

Da sich  $D_{\text{opt}}$  und  $D_{\text{wahr}}$  sehr nahe beieinander befinden ist bei einem Vergleich der oberen Teilgrafiken von Abbildung 9-1 und Abbildung 9-4 nicht ersichtlich, dass die Realisierungswahrscheinlichkeit einer Einkommensgeschichte unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  im Falle der optimal angepassten Dynamik für  $N \rightarrow \infty$  weniger schnell gegen 0 tendiert als im Fall der wahren Einkommensdynamik.

Die Realisationswahrscheinlichkeiten lassen sich jedoch auch für den Fall von Einkommensgeschichten berechnen, welche der Dynamik  $D_{\text{opt}}$  gehorchen.<sup>113</sup> Für

<sup>113</sup> Da bei  $D_{\text{opt}}$  für 10 respektive 100 Individuen immer Einkommensgeschichten mit reellen Elementen  $\gamma_{ij}$  generiert werden, müssen die Realisationswahrscheinlichkeiten hier mit dem stetigen Analogon

$N_1 = 10$  unterscheidbare Individuen ergibt sich somit die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$(9-7) \quad \Pr_{N_1}(\Gamma_{\text{opt},1} | D_{\text{mod}}) = n(\Gamma_{\text{opt},1}) \cdot \Pr(\Gamma_{\text{opt},1}) = N_1! \cdot \prod_{i,j=1}^2 \frac{(d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{\text{opt},1,ij}}}{\gamma_{\text{opt},1,ij}!} = 0.0123 \quad .$$

Für  $N_2 = 100$  Individuen lautet die Realisationswahrscheinlichkeit:

$$(9-7)' \quad \Pr_{N_2}(\Gamma_{\text{opt},2} | D_{\text{mod}}) = n(\Gamma_{\text{opt},2}) \cdot \Pr(\Gamma_{\text{opt},2}) = N_2! \cdot \prod_{i,j=1}^2 \frac{(d_{\text{mod},ij})^{\gamma_{\text{opt},2,ij}}}{\gamma_{\text{opt},2,ij}!} = 0.00000005101 \quad .$$

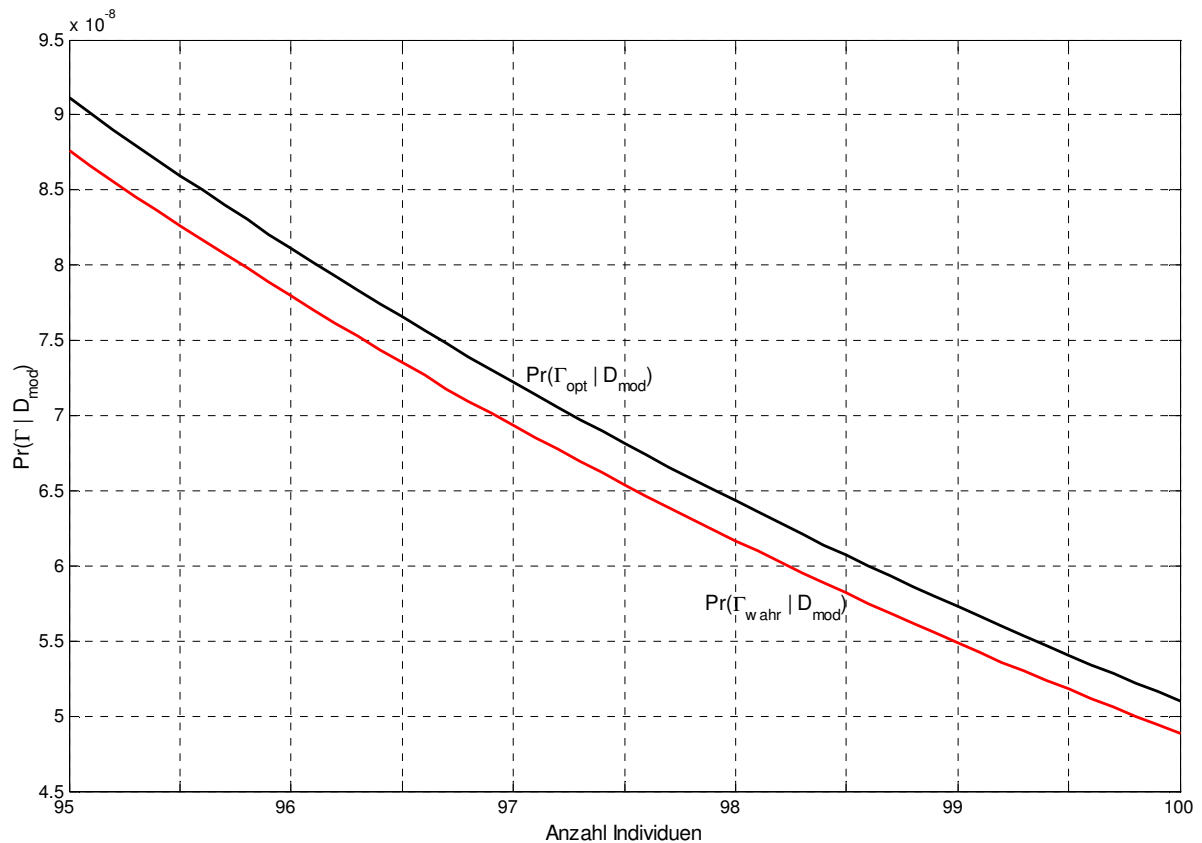
Ein Vergleich der Gleichungen (9-4) mit den Gleichungen (9-7) verdeutlicht jedoch, dass unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  die Dynamik  $D_{\text{opt}}$  mit grösserer Wahrscheinlichkeit realisiert wird als die Dynamik  $D_{\text{wahr}}$ . Während bei 10 Individuen die Realisationswahrscheinlichkeit einer unter der wahren Dynamik zustande gekommenen Einkommensgeschichte aus dem Blickwinkel der Hypothese noch etwas höher ist als bei einer durch die Dynamik  $D_{\text{opt}}$  generierten  $\Gamma$ -Matrix, verändert sich diese Reihenfolge bei 100 Individuen zugunsten einer höheren Wahrscheinlichkeit für die unter der optimal angepassten Dynamik zustande gekommene Einkommensgeschichte. Diese Tatsache wird in Abbildung 9-5 auch noch grafisch dargestellt.

In Abbildung 9-5 sind die oberen Teilgrafiken von Abbildung 9-1 und Abbildung 9-4 für den Bereich von 95 bis 100 Individuen vereint dargestellt. Es zeigt sich, dass die Kurve der Realisationswahrscheinlichkeit unter der Hypothese für die optimal angepasste Dynamik immer oberhalb derjenigen für die "wahre" Dynamik liegt. Dies bleibt auch so, wenn  $N$  gegen  $\infty$  strebt. Unter dem Gesichtspunkt der Hypothese wird somit, für  $N \rightarrow \infty$ , die optimal angepasste Einkommensdynamik mit höherer Wahrscheinlichkeit realisiert als die "wahre" Dynamik. Auch alle anderen Elemente der Menge  $\bar{D}$  werden unter der Hypothese mit geringerer Wahrscheinlichkeit als  $D_{\text{opt}}$  realisiert.

---

zur Fakultätsfunktion, nämlich der Gamma-Funktion, berechnet werden. Dabei gilt die Äquivalenz:  $n! = \text{Gamma}(n+1)$ . Auch für die Darstellungen in Abbildung 9-1 und Abbildung 9-4 wurde die Gamma-Funktion verwendet.





**Abbildung 9-5:** Asymptotik der Dynamiken  $D_{\text{opt}}$  und  $D_{\text{wahr}}$  unter der Hypothese  $D_{\text{mod}}$

In der Realität ist  $D_{\text{wahr}}$  unbekannt und soll geschätzt werden. Unter der gewählten Hypothese  $D_{\text{mod}}$  stellt die optimal an die Kontinuitätsrestriktionen (9-1) angepasste Dynamik  $D_{\text{opt}}$  die beste Schätzung der gesuchten wahren Übergangsdynamik dar. Wie im hier gezeigten Beispiel ersichtlich wurde, kann diese Schätzung, bei genügend guter Hypothese, sehr nah bei der gesuchten wahren Dynamik sein. Auch bei schlechten Hypothesen ist die optimal angepasste Dynamik immer noch die bessere Alternative als die Hypothese selbst. Die Güte der Schätzung hängt jedoch stark mit der gewählten Hypothese zusammen. Es empfiehlt sich somit, gut begründbare Hypothesen zu wählen.

### 9.1.3.3 Statistische Schlussfolgerungen

Neben der optimalen Anpassung der ursprünglichen Hypothese an die beobachteten Randverteilungen besteht aus statistischer Sicht ein Interesse an der statistischen Signifikanz der notwendigen Anpassungen. Ireland und Kullback (1968) zeigen, wie

die notwendige Anpassung der Hypothese  $D_{\text{mod}}$  an die beobachteten Querschnittsverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  auf statistische Signifikanz getestet werden kann. Wird die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  aus einer Stichprobe von  $n$  Individuen generiert, dann ist die Statistik

$$(9-8) \quad 2 \cdot n \cdot H(D_{\text{opt}} | D_{\text{mod}}) \sim \chi^2_{2K-2}$$

asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $2 \cdot K - 2$  Freiheitsgraden.<sup>114</sup> Diese Statistik kann dazu verwendet werden, die durch das Modell gegebene Nullhypothese zu testen. Obige Statistik besagt, ob sich die beiden Dichtematrizen  $D_{\text{opt}}$  und  $D_{\text{mod}}$  signifikant unterscheiden. Im hier gezeigten Beispiel ist die Statistik (9-8)  $\chi^2$ -verteilt mit 2 Freiheitsgraden. Auf dem 1%-Signifikanzniveau beträgt der kritische Wert der  $\chi^2$ -Verteilung mit 2 Freiheitsgraden 9.21. Wäre die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  aus einer Stichprobe bestehend aus  $n$  Individuen generiert worden, würden die notwendigen Anpassungen für Stichprobengrößen  $n \geq 46$  signifikant ausfallen. Die Signifikanz respektive Nichtsignifikanz der Statistik (9-8) sollte jedoch nicht als Test für die Güte der Hypothese betrachtet werden. Die  $\chi^2$ -Statistik besagt lediglich, ob die notwendigen Anpassungen der Hypothese an die beobachteten Randverteilungen signifikant oder nichtsignifikant ausfallen. Es ist durchaus denkbar, dass eine schlecht gewählte Hypothese im Sinne der relativen Entropie sehr nah an die Menge  $\bar{\mathbf{D}}$  zu liegen kommt, wobei die Teststatistik (9-8) nicht-signifikant ausfallen kann. Auch eine signifikante Statistik bei gut gewählter Hypothese ist eine durchaus reale Möglichkeit.

---

<sup>114</sup> Stammt  $D_{\text{mod}}$  aus einer Panelstudie, so entspricht  $n$  der Anzahl Individuen im Panel. In Kapitel 5 stammt zum Beispiel die Hypothese  $D_{\text{mod}}$  aus der PSID-Panelstudie und  $n$  entspricht der Anzahl aus diesem Panel extrahierter Individuen. Wurde hingegen bloss die hypothetische Übergangsdynamik  $P_{\text{mod}}$  direkt aus der Stichprobe generiert, die hypothetische zweidimensionale Dichte jedoch unter Einbezug der beobachteten Anfangsverteilung gemäss  $D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_t) \cdot P_{\text{mod}}$ , dann ist die Statistik gemäss (2-17)  $\chi^2$ -verteilt mit  $K - 1$  Freiheitsgraden. Entspringt die Hypothese jedoch theoretischen Überlegungen, so lässt sich eigentlich keine Statistik über die Signifikanz der Anpassung erstellen. Unabhängig von der Existenz einer solchen Statistik ist die angepasste Dynamik  $D_{\text{opt}}$  jedoch immer die bessere Abschätzung des dynamischen Prozesses als die ursprüngliche Hypothese.

### 9.1.4 Grosse Abweichungen anhand von Münzwürfen

Das Dublin Institute for Advanced Studies veranschaulicht den Begriff der grossen Abweichungen auf den beiden Webseiten [www.stp.dias.ie/APG/coin\\_tossing.html](http://www.stp.dias.ie/APG/coin_tossing.html) und [.../rate\\_function.html](http://www.stp.dias.ie/APG/rate_function.html) Anhand von Münzwurfexperimenten. Hier wird je eine Realisation der beiden Webseiten gezeigt. Bei beiden Realisationen werden  $n = 100$  Würfe mit einer fairen Münze ( $p = 0.5$ ) durchgeführt und die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass im Durchschnitt in mehr als 75 % ( $x = 0.75$ ) der Fälle Kopf geworfen wird ( $\Pr(M_n > x)$ ).

#### The Basic Ideas Underlying Large Deviations Illustrated with a Coin Tossing Experiment

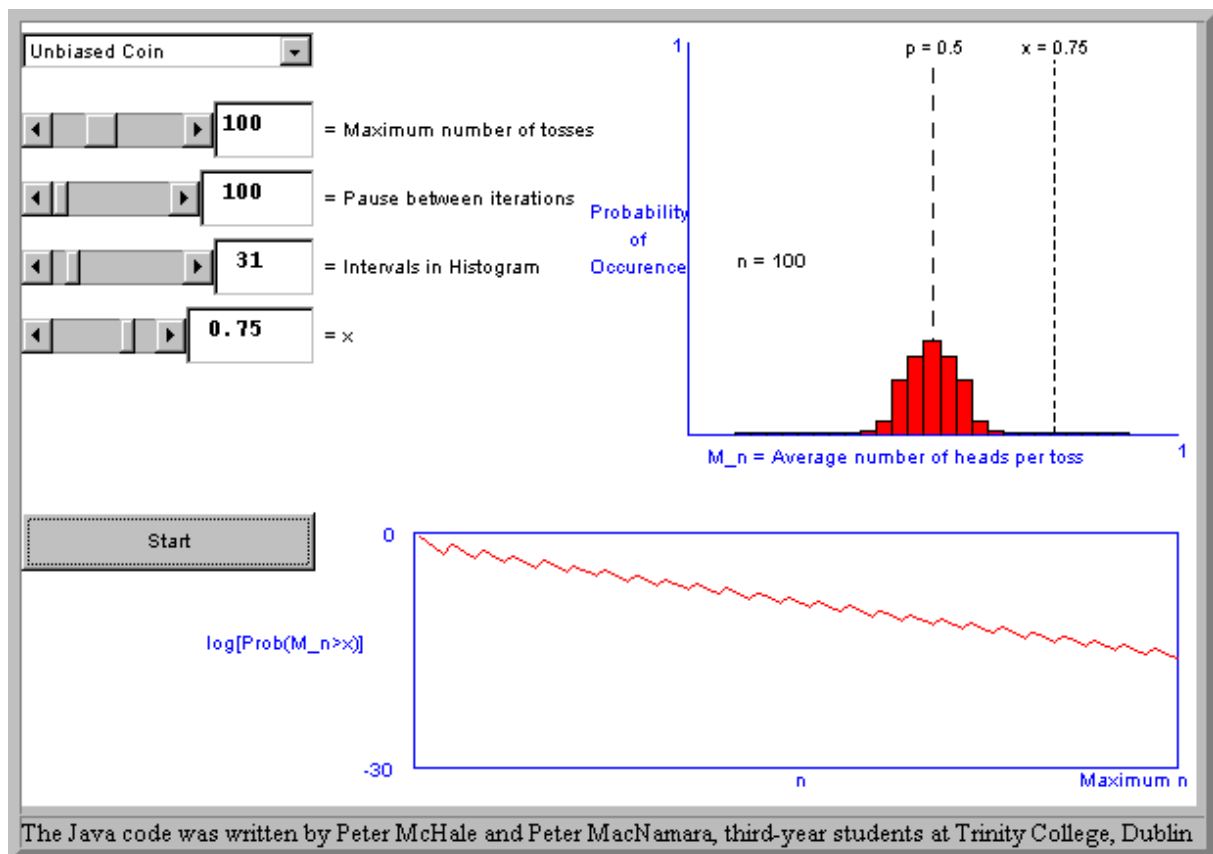
([http://www.stp.dias.ie/APG/coin\\_tossing.html](http://www.stp.dias.ie/APG/coin_tossing.html))

Imagine a coin tossing experiment, where we toss a coin  $n$  times and record each result. There are 2 possible outcomes for each toss, giving  $2^n$  possible outcomes in all. What can we say about the total number of heads? Firstly, there are  $n+1$  possible outcomes for the total, ranging from 0 heads to  $n$  heads. Secondly, of the  $2^n$  possible outcomes,  ${}^n C_r$  result in  $r$  heads. If the coin is fair, every outcomes is equally likely, and so the probability of getting  $r$  heads is  ${}^n C_r / 2^n$ . Thus the average number of heads per toss has  $n+1$  possible values,  $0, 1/n, 2/n, \dots, 1$  and the value  $r/n$  has weight  ${}^n C_r / 2^n$ . To calculate the probability of the average number of heads per toss lying in a particular range, we add up the weight of each of those possible values which fall inside that range. If we let  $M_n$  be the average number of heads in  $n$  tosses then, for example,

$$\Pr(M_n > x) = \sum_{\substack{r \\ x < \frac{r}{n} \leq 1}} \frac{1}{2^n} \cdot {}^n C_r .$$

Run the animation below for the unbiased coin. Increase the pause between each iteration and run for low values of  $n$  if it helps to interpret the histograms. We can calculate the probability of  $M_n$  exceeding  $x$ , for each value of  $n$  (i.e. the weight in the tail of the distribution.) Since this probability seems to decay exponentially as  $n$  increases, we plot the log of this probability against  $n$ . This is shown in the lower plot.

Remark: The value of Burstiness referred to in the Markov Chain mode can be chosen between  $-1$  and  $+1$ . A value of  $+1$  corresponds to a correlation of  $+1$ . A value of  $-1$  corresponds to the minimum allowed value of the correlation for the chosen value of  $p$ , the probability of heads. Values of Burstiness in between  $-1$  and  $+1$  correspond to the appropriate linear transformation.



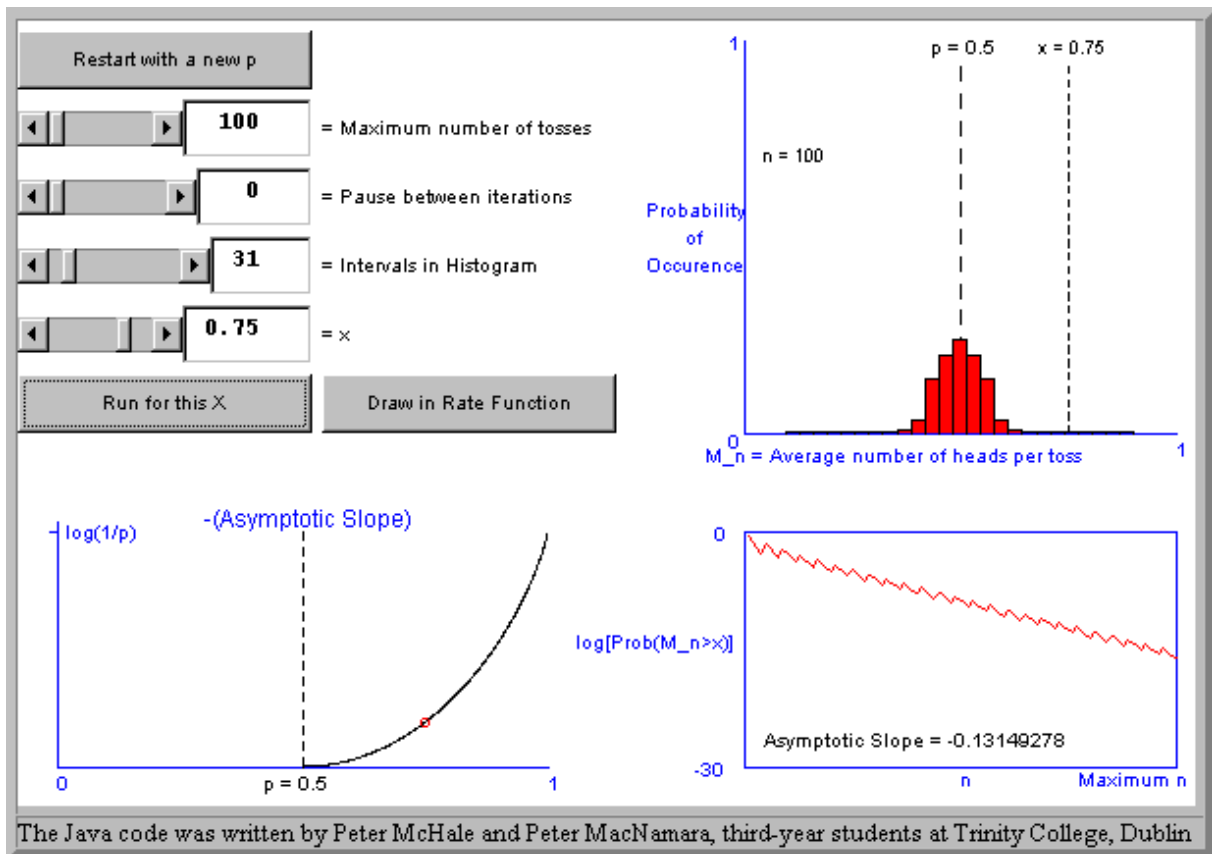
We can see clearly the Law of Large Numbers at work: as  $n$  increases, the distribution becomes more and more sharply peaked about the mean and the tails become smaller. It is also clear that, although things are a little jumpy initially, the lower plot becomes linear for large  $n$ . You can also run the applet in the case where the coin is biased and in the case where the sequence of heads and tails is a Markov chain. The same asymptotically linear plot should result. This leads us to the idea that the tail of the distribution of the average number of heads in  $n$  tosses decays exponentially as  $n$  increases.

### The Basic Ideas Underlying Large Deviations Illustrated with a Coin Tossing Experiment

([http://www.stp.dias.ie/APG/rate\\_function.html](http://www.stp.dias.ie/APG/rate_function.html))

So now we know that the tail of the distribution of the average number of heads in  $n$  tosses decays exponentially as  $n$  increases. You may ask how quickly it decays for each value of  $x$ . In other words, given that  $\Pr(M_n > x) \sim e^{-nI(x)}$  for large  $n$ , what is the function  $I(x)$ ? This section is intended to answer that question. Taking logs on both sides, we see that  $I(x)$  is just the absolute value of the asymptotic slope of the logarithmic plot that we had before.

Choose your value for  $p$  and then build up a picture of  $I(x)$  by running the animation for a number of values of  $x$ . (Values of  $x$  not in the tail of the distribution will just give an asymptotic slope of 0.) Once you have built up an idea of what  $I(x)$  looks like, try clicking on the "Draw in Rate Function" button.



In fact, drawing in the rate function just draws in  $x \cdot \log(x/p) + (1-x) \cdot \log((1-x)/(1-p))$  for values of  $x$  greater than  $p$ , the probability of heads. So we have a formula for  $I(x)$ , the rate-function for coin tossing.

One of the goals of Large Deviation theory is to provide a systematic way of calculating the rate-function.

## 9.2 ERGÄNZUNGEN ZUR MOBILITÄTSMESSUNG

### 9.2.1 Einleitung

In diesem Unterkapitel werden zunächst alle für Kapitel 3 notwendigen Beweise geführt. Zudem wird Kapitel 3 noch insofern ergänzt, dass Theorem 3-2 auch für grosse Abweichungen der empirischen Mobilität unterhalb eines Schwellenwerts  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  angepasst wird. Somit wird der gesamte Definitionsbereich für den Schwellenwert ( $\alpha \in (0, \alpha_{\max}(P))$ ) zur Evaluation von Abweichungen der empirischen Mobilität vom Gleichgewichtsindex zugänglich gemacht.

Zudem wird veranschaulicht, wie die Konvergenz von  $P^T$  für  $T \rightarrow \infty$  gegen  $\Pi$ , die Übergangsmatrix mit lauter Zeilen, welche identisch mit der Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  der Dynamik  $P$  sind, von den Eigenwerten von  $P$  abhängt. Danach wird die maximal erreichbare empirische Mobilität  $\alpha_{\max}(P)$  anhand von Beispielen erläutert. Insbesondere wird hergeleitet, gegen welche Werte die Periodenmobilität konvergiert, falls der Schwellenwert in der Nähe der Grenzen des Definitionsbereichs von  $\alpha$  (0 und  $\alpha_{\max}(P)$ ) gewählt wird.

Anhand des Bartholomew-Funktionalen sowie diverser Beispielmatrizen werden der relative und absolute Blickwinkel hinsichtlich der Periodenmobilität diskutiert. Danach werden die Periodenmobilitäten der Beispielmatrizen auch für die beiden restlichen, in Kapitel 3 vorgestellten Mobilitätsfunktionale analysiert. Zum Schluss werden die sich schneidenden Periodenmobilitätskurven zweier positiver Übergangsdynamiken mit identischem Bartholomew-Index über den gesamten Definitionsbereich des Schwellenwerts ( $\alpha \in (0, \alpha_{\max}(P))$ ) zur Bestimmung des Periodenindex ausführlich diskutiert. Diese Diskussion mündet dann in Ideen, in welche Richtung die hier vorgestellte Methodik zur Mobilitätsanalyse weiterentwickelt und ergänzt werden könnte.

### 9.2.2 Beweise und Herleitungen

Die nachfolgenden beiden Lemmas werden als Hilfsmittel dazu benötigt, die in Kapitel 3 vorgestellten Propositionen und Theoreme zu beweisen. Im ersten Lemma geht es darum aufzuzeigen, dass zu jedem Schwellenwert  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  für die

empirische Mobilität eine positive Wahrscheinlichkeit besteht, dass sie den Schwellenwert unter der Einkommensdynamik  $P$  auch erreicht oder übertrifft. Die in Lemma 9-2 hergeleitete momentengenerierende Funktion  $M_T(\beta)$  wird im nachfolgenden Beweis zu Proposition 3-3 dazu benötigt, die wichtige strikte Konvexität von  $\lambda_\beta$  zu beweisen.

LEMMA 9-1: Jede primitive Übergangsmatrix  $P$  und jedes Funktional  $F$  auf  $Z \times Z$  erfüllen die folgende *Uniform Recurrence Condition*:

Es existiert eine positive ganze Zahl  $m$  so, dass

$$(9-9) \quad \eta = \min_i \sum_j \Pr\{X_m = j, S_m > \alpha \mid X_0 = i\} > 0 \quad \text{für } \alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P)) .$$

BEWEIS: Es soll gezeigt werden, dass für alle  $i$  und  $j$  ein Pfad  $\Psi$  existiert welcher so in  $m$  Schritten von  $i$  nach  $j$  führt, dass  $S_m(\Psi) > \alpha$ . Im Folgenden sei  $\Psi^*$  ein Kreispfad, auf dem die empirische Mobilität ihr Maximum erreicht:

$$S_N(\Psi^*) = S_N(\{I_0^*, I_1^*, \dots, I_N^*\}) = \alpha_{\max}(P), \quad \text{mit } 2 \leq N \leq K .$$

$S_N(\Psi^*)$  entspricht dabei der empirischen Mobilität des Kreispfades  $\Psi^*$ . Da  $P$  eine primitive Matrix ist, existiert eine ganze Zahl  $n$  so, dass sich für alle  $i$  ein Pfad  $\Psi_1$  finden lässt, welcher in  $n$  Schritten von  $i$  nach  $I_0^*$  führt. Zudem lässt sich auch für jedes  $j$  ein Pfad  $\Psi_2$  finden, welcher in  $n$  Schritten von  $I_N^*$  nach  $j$  führt. Es lässt sich sodann ein Pfad  $\Psi$  konstruieren, welcher von  $i$  nach  $j$  führt und dabei  $q$  mal den Kreispfad  $\Psi^*$  durchläuft:

$$\Psi = \left\{ \Psi_1, \underbrace{\Psi^*, \dots, \Psi^*}_{q \text{ Durchläufe}}, \Psi_2 \right\} .$$

Die mittels des Funktionals  $F$  berechnete empirische Mobilität entlang dieses Pfades nimmt den folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} S_{2n+qN}(\Psi) &= \frac{1}{2 \cdot n + q \cdot N} \cdot (n \cdot S_n(\Psi_1) + q \cdot N \cdot S_{qN}(\Psi^*) + n \cdot S_n(\Psi_2)) \\ &= \frac{n}{2 \cdot n + q \cdot N} \cdot S_n(\Psi_1) + \frac{q \cdot N}{2 \cdot n + q \cdot N} \cdot \alpha_{\max}(P) + \frac{n}{2 \cdot n + q \cdot N} \cdot S_n(\Psi_2) . \end{aligned}$$

Strebt  $q$  gegen unendlich, gehen der erste und der letzte Term dieses Ausdrucks gegen null während der mittlere Term gegen  $\alpha_{\max}(P)$  strebt. Wegen  $\alpha_{\max}(P) > \alpha$  wird die empirische Mobilität  $S_{2 \cdot n + q \cdot N}(\Psi)$  entlang des Pfades  $\Psi$  den Wert  $\alpha$  übersteigen, sobald  $q$  gross genug gewählt wird. Obschon  $q$  immer noch von  $i$  und  $j$  abhängig ist kann  $q^*$  als Minimum aller  $q$ 's gewählt werden, welche gross genug sind, um die empirische Mobilität entlang der entsprechenden Pfade  $\Psi$  für alle Kombinationen  $i$  und  $j$  über jeden möglichen Schwellenwert  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  zu heben. Die ganze Zahl  $m$  wird dann definiert als  $m = 2 \cdot n + q^* \cdot N$ .

**q.e.d.**

LEMMA 9-2: Die momentengenerierende Funktion  $M_T(\beta)$  von  $\sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}X_t}$ , der Summe der Bewertungen entlang eines Einkommenspfades, welche natürlich der mit dem Betrachtungshorizont  $T$  multiplizierten empirischen Mobilität  $S_T$  entlang dieses Pfades entspricht, lautet:

$$M_T(\beta) = E_P \left[ \exp \left( \beta \cdot \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}X_t} \right) \right] = \sum_{i=1}^K \mu_i \cdot \sum_{j=1}^K a_{\beta,ij}^{(T)} .^{115}$$

In Matrixschreibweise wird  $M_T(\beta)$  kompakter zu:

$$M_T(\beta) = \mu' \cdot A_{\beta}^T \cdot \mathbf{1} .$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{1}$  wie gehabt den  $(K \times 1)$ -Vektor aus lauter Einsen.

BEWEIS:

$$M_T(\beta) = E_P \left[ \exp \left( \beta \cdot \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}X_t} \right) \right] = \sum_{x_0=1}^K \sum_{x_1=1}^K \cdots \sum_{x_T=1}^K \exp \left( \beta \cdot \sum_{t=1}^T f_{x_{t-1}x_t} \right) \cdot p_{x_{T-1}x_T} \cdots p_{x_0x_1} \cdot \mu_{x_0}$$

---

<sup>115</sup> Mit  $x_{ij}^{(n)}$  ist das Element  $(i,j)$  der  $n$ -ten Potenz der Matrix  $X$  gemeint und nicht die  $n$ -te Potenz des Elements  $(i,j)$  der Matrix  $X$ , welches mit  $x_{ij}^n$  bezeichnet würde.  $E_P$  bezeichnet den Erwartungswert hinsichtlich der Einkommensdynamik  $P$ .



$$\begin{aligned}
&= \sum_{x_0} \sum_{x_1} \cdots \left( \sum_{x_T} \underbrace{\exp(\beta \cdot f_{x_{T-1}x_T}) \cdot p_{x_{T-1}x_T}}_{a_{\beta, x_{T-1}x_T}} \right) \cdot \exp\left(\beta \cdot \sum_{t=1}^{T-1} f_{x_{t-1}x_t}\right) \cdot p_{x_{T-2}x_{T-1}} \cdots p_{x_0x_1} \cdot \mu_{x_0} \\
&= \sum_{x_0} \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{T-1}} \left( \sum_{x_T} a_{\beta, x_{T-1}x_T} \right) \cdot \exp\left(\beta \cdot \sum_{t=1}^{T-1} f_{x_{t-1}x_t}\right) \cdot p_{x_{T-2}x_{T-1}} \cdots p_{x_0x_1} \cdot \mu_{x_0} \\
&= \sum_{x_0} \sum_{x_1} \cdots \left( \sum_{x_{T-1}} \left( \sum_{x_T} a_{\beta, x_{T-1}x_T} \right) \cdot \underbrace{\exp(\beta \cdot f_{x_{T-2}x_{T-1}}) \cdot p_{x_{T-2}x_{T-1}}}_{a_{\beta, x_{T-2}x_{T-1}}} \right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\beta \cdot \sum_{t=1}^{T-2} f_{x_{t-1}x_t}\right) \cdot p_{x_{T-3}x_{T-2}} \cdots p_{x_0x_1} \cdot \mu_{x_0} \\
&= \sum_{x_0} \sum_{x_1} \cdots \left( \sum_{x_{T-1}} \left( \sum_{x_T} a_{\beta, x_{T-1}x_T} \right) \cdot a_{\beta, x_{T-2}x_{T-1}} \right) \cdot \exp\left(\beta \cdot \sum_{t=1}^{T-2} f_{x_{t-1}x_t}\right) \cdot p_{x_{T-3}x_{T-2}} \cdots p_{x_0x_1} \cdot \mu_{x_0} \\
&\quad \dots \\
&= \sum_{x_0} \left( \underbrace{\sum_{x_1} \left( \cdots \left( \sum_{x_{T-1}} \left( \sum_{x_T} a_{\beta, x_{T-1}x_T} \right) \cdot a_{\beta, x_{T-2}x_{T-1}} \right) \cdots \right) \cdot a_{\beta, x_0x_1}}_{= \sum_{x_T} a_{\beta, x_0x_T}^{(T)}} \right) \cdot \mu_{x_0}
\end{aligned}$$

Substitution von  $x_0$  durch  $i$  und  $x_T$  durch  $j$  führt dann zur gesuchten Lösung:

$$M_T(\beta) = E_P \left[ \exp\left(\beta \cdot \sum_{t=1}^T f_{x_{t-1}x_t}\right) \right] = \sum_{i=1}^K \mu_i \cdot \sum_{j=1}^K a_{\beta, ij}^{(T)} .$$

**q.e.d.**

BEWEIS VON PROPOSITION 3-3:

Da die zugrundeliegende Übergangsdynamik  $P$  nichtnegativ und irreduzibel mit positiver Diagonale ist, gilt dies auch für  $A_\beta \forall \beta \in \mathfrak{R}$  (vergleiche Definition 3-6). Der Spektralradius einer nichtnegativen, irreduziblen Matrix mit positiver Spur, eine positive reelle Zahl, ist ein einfacher Eigenwert dieser Matrix.  $\lambda_\beta$  entspricht dem Spektralradius von  $A_\beta$  und somit ist der Definitionsbereich von  $\lambda_\beta \forall \beta \in \mathfrak{R}$  gleich  $\mathfrak{R}^+$  (vgl. Berman und Plemmons (1994), Theorem 2.1.4, S. 27). Damit ist (i) bewiesen.

$A_\beta$  entspricht für  $\beta = 0$  der Übergangsmatrix  $P$ . Der reelle und betragsmässig grösste Eigenwert von stochastischen Matrizen ist gleich 1. Dies bestätigt (ii).

Weil  $F \geq 0$  ist gilt für  $\beta < \beta^*$ , dass  $0 < A_\beta < A_{\beta^*}$  ist. Da  $A_\beta$  primitiv und deshalb irreduzibel ist, impliziert dies, dass  $\lambda_\beta = \rho(A_\beta) < \rho(A_{\beta^*}) = \lambda_{\beta^*}$ .<sup>116</sup> Folglich wächst  $\lambda_\beta$  mit zunehmendem  $\beta$  strikt. Dies bestätigt (iii).

Da  $A_\beta$  irreduzibel ist, ist  $\lambda_\beta$  eine einfache Wurzel<sup>117</sup> der charakteristischen Gleichung für  $A_\beta$ . Das implizite Funktionstheorem (Dieudonné 1960) impliziert dann, dass  $\lambda_\beta$  für alle  $\beta \in \mathfrak{R}$  analytisch ist.<sup>118</sup> Dies beweist (iv).

Wenn  $M_T(\beta)$  die momentengenerierende Funktion von  $\sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}, X_t}$  bezeichnet, dann impliziert Lemma 9-2, dass

$$M_T(\beta) = \sum_{i=1}^K \mu_i \cdot \sum_{j=1}^K a_{\beta,ij}^{(T)} = \lambda_\beta^T \cdot \sum_{i=1}^K \mu_i \cdot \sum_{j=1}^K r_{\beta,i} \cdot \ell_{\beta,j} \cdot [1 + O(\epsilon_\beta^T)],$$

wobei die zweite Gleichheit aus Proposition 3-2 folgt.<sup>119</sup> Dies impliziert dann, dass:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [M_T(\beta)]^{1/T} = \lambda_\beta \quad \text{da} \quad \left\{ \sum_{i=1}^K \mu_i \cdot \sum_{j=1}^K r_{\beta,i} \cdot \ell_{\beta,j} \cdot [1 + O(\epsilon_\beta^T)] \right\}^{1/T} \rightarrow 1 \quad \text{für } T \rightarrow \infty.$$

Da  $[M_T(\beta)]^{1/T}$  eine momentengenerierende Funktion ist und ihr Logarithmus,  $(1/T) \cdot \log[M_T(\beta)]$ , eine summengenerierende Funktion, sind diese Funktionen für alle  $T$  konvex auf  $\mathfrak{R}$  (Billingsley 1986, 144-145).<sup>120</sup> Da  $\lambda_\beta$  und  $\log \lambda_\beta$  punktweise

<sup>116</sup> Vergleiche Berman und Plemmons 1994, Korollar 1.3.29, S.15.

<sup>117</sup>  $\lambda_\beta$  entspricht dem Spektralradius von  $A_\beta$  und ist somit reellwertig positiv. Alle anderen Eigenwerte von  $A_\beta$  sind betragsmässig kleiner oder gleich  $\lambda_\beta$  ( $A_\beta$  irreduzibel) respektive strikt kleiner als  $\lambda_\beta$  ( $A_\beta$  primitiv).

<sup>118</sup> Eine analytische Funktion ist unendlich oft differenzierbar.

<sup>119</sup> Vergleiche Abschnitt 3.4.1, Proposition 3-2 (iii).

<sup>120</sup> Der Logarithmus einer momentengenerierenden Funktion wird hier als summengenerierende Funktion bezeichnet.

Grenzwerte von konvexen Funktionen sind, sind auch  $\lambda_\beta$  und  $\log \lambda_\beta$  selbst konvex (Rockafellar 1970, 90). Da die beiden Funktionen analytisch sind, können sie nicht bloss auf einem Teilintervall von  $\mathfrak{R}$  linear sein.  $\lambda_\beta$  und  $\log \lambda_\beta$  können jedoch auch nicht auf dem gesamten Definitionsbereich  $\mathfrak{R}$  linear sein, da sie einerseits mit steigendem  $\beta$  gegen Unendlich konvergieren und andererseits gegen unten beschränkt sind. So gilt für diese unteren Schranken der beiden Funktionen:

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \lambda_\beta = \max_i p_{ii} > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \log \lambda_\beta = \max_i \log p_{ii} > -\infty .$$

Somit müssen  $\lambda_\beta$  und  $\log \lambda_\beta$  zwingend strikt konvex sein. Dies beweist (v).

Weil  $\lambda_\beta$  eine einfache (d.h. reelle und eindeutige) Wurzel des charakteristischen Polynoms von  $A_\beta$  ist, ist das Differential von  $\lambda_\beta$  hinsichtlich  $\beta$  gegeben durch (Magnus und Neudecker 1988, 161-162)

$$\lambda'_\beta = \frac{d\lambda_\beta}{d\beta} = \ell'_\beta \cdot \frac{dA_\beta}{d\beta} \cdot r_\beta ,$$

wobei  $\ell_\beta$  und  $r_\beta$  zu  $\lambda_\beta$  gehörende linke und rechte Eigenvektoren sind, welche gemäss  $\ell_\beta \cdot r_\beta = 1$  normiert werden. Werden die in Proposition 3-2 aufgelisteten Eigenschaften von  $A_\beta$  und  $P_\beta$  verwendet, folgt daraus:

$$\begin{aligned} \lambda'_\beta &= \sum_{i,j} \ell_{\beta,i} \cdot \frac{da_{\beta,ij}}{d\beta} \cdot r_{\beta,j} = \sum_{i,j} \ell_{\beta,i} \cdot \frac{dp_{ij} \cdot e^{\beta \cdot f_{ij}}}{d\beta} \cdot r_{\beta,j} = \sum_{i,j} \ell_{\beta,i} \cdot p_{ij} \cdot f_{ij} \cdot e^{\beta \cdot f_{ij}} \cdot r_{\beta,j} \\ &= \lambda_\beta \cdot \sum_{i=1}^K \underbrace{\ell_{\beta,i} \cdot r_{\beta,i}}_{\pi_{P_\beta,i}} \cdot \sum_{j=1}^K \underbrace{\frac{p_{ij} \cdot e^{\beta \cdot f_{ij}} \cdot r_{\beta,j}}{\lambda_\beta \cdot r_{\beta,i}}}_{p_{\beta,ij}} \cdot f_{ij} \\ &= \lambda_\beta \cdot \sum_{i=1}^K \pi_{P_\beta,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\beta,ij} \cdot f_{ij} = \lambda_\beta \cdot M_F^e(P_\beta) . \end{aligned}$$

Dies beweist (vi). Folglich hat das Mobilitätsfunktional  $F$  den Erwartungswert  $\lambda'_\beta / \lambda_\beta$  hinsichtlich der invarianten Verteilung unter der Dynamik  $P_\beta$ .

**q.e.d.**

In Proposition 3-4 sowie darauf aufbauend in Theorem 3-2 geht es darum, zu zeigen, dass für irgendein  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  ein eindeutiges  $\beta(\alpha) \in \mathfrak{R}$  sowie die zugehörige

ge Perron-Frobenius-Transformierte  $P_{\beta(\alpha)}$  von  $P$  existieren, sodass die Gleichgewichtsmobilität von  $P_{\beta(\alpha)}$  gerade dem gewählten Schwellenwert  $\alpha$  für Abweichungen der empirischen Mobilität vom Gleichgewichtsindex  $M_F^e(P)$  entspricht. Dies bedeutet, dass die Legendre-Fenchel Transformierte von  $\log \lambda_\beta$  ( $\Rightarrow \alpha \cdot \beta(\alpha) - \log \lambda_{\beta(\alpha)}$ ) und somit  $\beta(\alpha)$  eindeutig bestimmt sind. Damit kann dann gezeigt werden, dass die Wahrscheinlichkeit  $\Pr\{S_T \geq \alpha\}$  von Abweichungen der empirischen Mobilität  $S_T$  oberhalb eines Schwellenwerts  $\alpha$  für grosse  $T$  approximativ mit  $\exp\{-T \cdot h(P_{\beta(\alpha)}|P)\}$  gegen 0 strebt. Mit anderen Worten ausgedrückt misst die exponentielle Rate  $h(P_{\beta(\alpha)}|P)$  die Geschwindigkeit, mit der  $S_T$  gegen den Gleichgewichtsindex  $M_F^e(P)$  konvergiert.

BEWEIS VON PROPOSITION 3-4:

Anstelle der Matrix  $A_\beta$ , welche die Perron-Frobenius-Transformierte  $P_\beta$  determiniert, wird nun die Matrix  $A_\beta \cdot \exp(-\alpha \cdot \beta)$  betrachtet. Dabei wird der Parameter  $\alpha$  so gewählt, dass  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$ . Diese Matrix besitzt den maximalen Eigenwert  $g(\beta) = \lambda_\beta \cdot \exp(-\alpha \cdot \beta)$ . Die Anwendung von Proposition 3-3 auf diese Matrix impliziert, dass  $g(\beta)$  eine differenzierbare und strikt konvexe Funktion von  $\beta$  ist und die folgende Ableitung besitzt:

$$g'(\beta) = \frac{d\lambda_\beta \cdot e^{-\alpha \cdot \beta}}{d\beta} = e^{-\alpha \cdot \beta} \cdot (-\alpha \cdot \lambda_\beta + \lambda'_\beta) .$$

Für  $\beta = 0$  wird der Klammerausdruck  $-\alpha \cdot \lambda_0 + \lambda'_0 = -\alpha + M_F^e(P) < 0$  (vergleiche Proposition 3-3). Deshalb muss diese Ableitung für alle  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  bei  $\beta = 0$  negativ sein.

Mit  $l_\beta$  sei der auf eins normierte und zu  $\lambda_\beta$  gehörende linke Eigenvektor von  $A_\beta$  bezeichnet. Da  $A_\beta$  primitiv ist besitzt  $l_\beta$  nur strikt positive Elemente. Natürlich gilt auch hier die charakteristische Gleichung:

$$l'_\beta \cdot A_\beta = \lambda_\beta \cdot l'_\beta$$

Anmultiplizieren des  $(K \times 1)$ -Vektors aus lauter Einsen  $\iota$  von der rechten Seite führt zur folgenden Darstellung für  $\lambda_\beta$ :

$$\lambda_{\beta} \cdot l'_{\beta} \cdot \mathbf{1} = \lambda_{\beta} = l'_{\beta} \cdot \mathbf{A}_{\beta} \cdot \mathbf{1} = \sum_{i,j=1}^K l_{\beta,i} \cdot a_{\beta,ij} = \sum_{i=1}^K l_{\beta,i} \cdot \sum_{j=1}^K a_{\beta,ij} \cdot$$

Die m-te Potenz von  $\lambda_{\beta}$  lässt sich leicht unter Zuhilfenahme der vorangehenden beiden Formeln darstellen:

$$\begin{aligned} \lambda_{\beta} &= l'_{\beta} \cdot \mathbf{A}_{\beta} \cdot \mathbf{1} \\ \lambda_{\beta}^2 &= \lambda_{\beta} \cdot l'_{\beta} \cdot \mathbf{A}_{\beta} \cdot \mathbf{1} = l'_{\beta} \cdot \mathbf{A}_{\beta} \cdot \mathbf{A}_{\beta} \cdot \mathbf{1} = l'_{\beta} \cdot \mathbf{A}_{\beta}^2 \cdot \mathbf{1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(9-10) \quad \lambda_{\beta}^m = l'_{\beta} \cdot \mathbf{A}_{\beta}^m \cdot \mathbf{1} = \sum_{i=1}^K l_{\beta,i} \cdot \sum_{j=1}^K a_{\beta,ij}^{(m)} \cdot$$

Diese Herleitung ist zugleich ein Beweis dafür, dass sich beim Potenzieren einer Matrix ihre Eigenwerte entsprechend potenzieren und die zugehörigen Eigenvektoren unverändert bleiben. Das (i,j)-te Element von  $\mathbf{A}_{\beta}^m$  kann unter Substitution von i durch  $x_0$  und j durch  $x_m$  folgendermassen geschrieben werden (vergleiche auch Beweis zu Lemma 9-2):

$$\begin{aligned} a_{\beta, x_0 x_m}^{(m)} &= \sum_{x_1=1}^K \sum_{x_2=1}^K \dots \sum_{x_{m-1}=1}^K a_{\beta, x_0 x_1} \cdot \dots \cdot a_{\beta, x_{m-1} x_m} \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_{m-1}} p_{x_0 x_1} \cdot \exp(\beta \cdot f_{x_0 x_1}) \cdot \dots \cdot p_{x_{m-1} x_m} \cdot \exp(\beta \cdot f_{x_{m-1} x_m}) \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_{m-1}} p_{x_0 x_1} \cdot \dots \cdot p_{x_{m-1} x_m} \cdot \exp(\beta \cdot (f_{x_0 x_1} + \dots + f_{x_{m-1} x_m})) \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_{m-1}} \Pr \left\{ X_m = j, S_m = \frac{\sum_{n=1}^m f_{x_{n-1} x_n}}{m} \mid X_0 = i \right\} \cdot \exp \left( \beta \cdot \sum_{n=1}^m f_{x_{n-1} x_n} \right). \end{aligned}$$

Dieser verschachtelte Summenausdruck stellt also nichts anderes als die über alle möglichen Pfade aufsummierten Wahrscheinlichkeiten dar, entlang eines spezifischen Pfades von i nach j zu gelangen, jeweils gewichtet mit dem zum entsprechenden Pfad gehörigen  $\exp(\beta \cdot \sum_{x_{n-1} x_n})$ . Nach Rücksubstitution von i und j sowie Zusammenfassen eines spezifischen Pfades  $i \Rightarrow x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{m-1} \Rightarrow j$  durch die Variable "Pfad" und der auf diesem spezifischen Pfad erzielten empirischen

Mobilität durch  $S_{\text{Pfad}}$  resultiert die folgende vereinfachte Darstellung für das  $(i,j)$ -te Element von  $A_{\beta}^m$ :

$$(9-11) \quad a_{\beta,ij}^{(m)} = \sum_{\text{Pfad}} \Pr\{X_m = j, S_m = S_{\text{Pfad}} \mid X_0 = i\} \cdot e^{\beta \cdot S_{\text{Pfad}}} \\ = \sum_{\text{Pfad}} \Pr\{X_m = j \mid X_0 = i\} \cdot e^{\beta \cdot S_{\text{Pfad}}} .$$

Da Lemma 9-1 impliziert, dass P und F die Uniform Recurrence Condition (9-9) erfüllen, ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung (9-11) in (9-10):

$$\lambda_{\beta}^m = \sum_i l_{\beta,i} \cdot \sum_j \sum_{\text{Pfad}} \Pr\{X_m = j \mid X_0 = i\} \cdot e^{\beta \cdot S_{\text{Pfad}}} \\ = \sum_i l_{\beta,i} \cdot \sum_{\text{Pfad}} \sum_j \Pr\{X_m = j \mid X_0 = i\} \cdot e^{\beta \cdot S_{\text{Pfad}}} \\ \geq \sum_i l_{\beta,i} \cdot \underbrace{\sum_{\text{Pfad}} \sum_j \Pr\{X_m = j, S_{\text{Pfad}} > \alpha \mid X_0 = i\}}_{\geq \eta} \cdot e^{\beta \cdot S_{\text{Pfad}}} \geq \eta \cdot \underbrace{\sum_i l_{\beta,i}}_{=1} \cdot \sum_{\substack{\text{Pfad} \\ (S_{\text{Pfad}} > \alpha)}} e^{\beta \cdot S_{\text{Pfad}}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\beta}^m \geq \eta \cdot \sum_{\substack{\text{Pfad} \\ (S_{\text{Pfad}} > \alpha)}} e^{\beta \cdot S_{\text{Pfad}}} > 0 .$$

Für jeden Pfad aus der Menge aller Pfade deren empirische Mobilität den Schwellenwert  $\alpha$  übersteigt ( $S_{\text{Pfad}} > \alpha$ ), gilt somit:

$$\lambda_{\beta} \geq \eta^{1/m} \cdot e^{\beta \cdot S_{\text{Pfad}}} > 0 .$$

Für den maximalen Eigenwert  $g(\beta) = \lambda_{\beta} \cdot \exp(-\alpha \cdot \beta)$  der Matrix  $A_{\beta} \cdot \exp(-\alpha \cdot \beta)$  folgt deshalb:

$$(9-12) \quad g(\beta) = e^{-\alpha \cdot \beta} \cdot \lambda_{\beta} \geq \eta^{1/m} \cdot e^{\beta \cdot (S_{\text{Pfad}} - \alpha)} .$$

Obschon  $g'(0) < 0$  ist zeigt dies auf, dass  $g'(\beta)$  nicht über den gesamten Definitionsbereich von  $\beta$  negativ sein kann. Zudem muss  $g'(\beta)$  positiv werden, falls  $\beta$  gross genug gewählt wird. Dies deshalb, weil die rechte Seite von Ungleichung (9-12) für  $\beta \rightarrow \infty$ , wegen  $S_{\text{Pfad}} > \alpha$ , gegen Unendlich strebt. Wegen dem Ungleichheitszeichen in (9-12) gilt dies auch für  $g(\beta)$ . Die strikte Konvexität von  $g(\beta)$  sichert sodann, dass  $g(\beta)$  über ein eindeutiges Infimum im Intervall  $(0, +\infty)$  auf-

weist. Da  $g(\beta)$  über ein solches Infimum verfügt, trifft dies auch auf den ebenfalls strikt konvexen Logarithmus von  $g(\beta)$  zu:

$$\log g(\beta) = \log \lambda_\beta - \alpha \cdot \beta .$$

Somit existiert ein eindeutiges Infimum und die Legendre-Fenchel Transformierte  $\alpha \cdot \beta(\alpha) - \log \lambda_{\beta(\alpha)}$  und somit  $\beta(\alpha)$  sind eindeutig bestimmt, womit Proposition 3-4 bewiesen wäre.

**q.e.d.**

Um Theorem 3-2 zu beweisen wird zunächst der folgende Hilfssatz aufgestellt und bewiesen.

LEMMA 9-3: Es sei  $P$  eine primitive Übergangsmatrix. Für jedes  $\beta \in \mathfrak{X}$  und jede Übergangsmatrix  $Q$ , welche absolut stetig hinsichtlich  $P$  ist,<sup>121</sup> ist die folgende Dekomposition möglich:

$$h(Q | P) = h(Q | P_\beta) + \beta \cdot \sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \sum_{j=1}^K q_{ij} \cdot f_{ij} - \log \lambda_\beta .$$

Hierbei ist  $F$  ein Mobilitätsfunktional auf  $Z \times Z$ ,  $P_\beta$  ist die Perron-Frobenius-Transformierte von  $P$  und  $\lambda_\beta$  ist der grösste Eigenwert von  $A_\beta$  (vergleiche Definition 3-6). Zudem sei für  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  die folgende Menge von Übergangsmatrizen definiert:

$$\Omega_\alpha = \left\{ Q \mid \sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \sum_{j=1}^K q_{ij} \cdot f_{ij} = \alpha \right\} .$$

$\Omega_\alpha$  ist die Menge aller Übergangsmatrizen  $Q$ , deren Gleichgewichtsindex  $M_F^e(Q)$  dem gewählten Schwellenwert  $\alpha$  entspricht. Dann existiert ein positiver, endlicher und eindeutiger Wert  $\beta = \beta(\alpha)$  so, dass  $P_{\beta(\alpha)} \in \Omega_\alpha$  und  $\min_{Q \in \Omega_\alpha} h(Q | P) = h(P_{\beta(\alpha)} | P)$ .

---

<sup>121</sup> Zur Erinnerung:  $Q$  ist absolut stetig hinsichtlich  $P$  wenn  $p_{ij} = 0$  impliziert, dass auch  $q_{ij} = 0$ .

BEWEIS: Da  $\mathbf{Q}$  absolut stetig hinsichtlich  $\mathbf{P}$  ist sowie  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{P}_\beta$  äquivalent sind, gilt:<sup>122</sup>

$$\left. \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right|_{\Sigma_T} = \left. \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}_\beta} \frac{d\mathbf{P}_\beta}{d\mathbf{P}} \right|_{\Sigma_T} .$$

Wird dieser Ausdruck logarithmiert und danach der Erwartungswert hinsichtlich  $\mathbf{Q}$  gebildet, dann folgt unter Anwendung der Definition der relativen Entropie (Definition 3-5):

$$\begin{aligned} \int \log \left. \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right|_{\Sigma_T} d\mathbf{Q} &= \int \log \left. \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}_\beta} \right|_{\Sigma_T} d\mathbf{Q} + \int \log \left. \frac{d\mathbf{P}_\beta}{d\mathbf{P}} \right|_{\Sigma_T} d\mathbf{Q} \\ \Rightarrow H_T(\mathbf{Q} | \mathbf{P}) &= H_T(\mathbf{Q} | \mathbf{P}_\beta) + \int \log \left. \frac{d\mathbf{P}_\beta}{d\mathbf{P}} \right|_{\Sigma_T} d\mathbf{Q} . \end{aligned}$$

Es gilt nun noch, das letzte Integral aufzulösen. Für jeden gegebenen Pfad  $(x_0, x_1, \dots, x_T)$  gilt:

$$\begin{aligned} \log \left. \frac{d\mathbf{P}_\beta}{d\mathbf{P}} \right|_{\Sigma_T}(x_0, \dots, x_T) &= \log \left( \frac{\pi_{\mathbf{P}_\beta, x_0} \cdot p_{\beta, x_0 x_1} \cdots p_{\beta, x_{T-1} x_T}}{\pi_{\mathbf{P}, x_0} \cdot p_{x_0 x_1} \cdots p_{x_{T-1} x_T}} \right) \\ &= \log \frac{\pi_{\mathbf{P}_\beta, x_0}}{\pi_{\mathbf{P}, x_0}} + \sum_{t=1}^T \log \left( \frac{p_{x_{t-1} x_t} \cdot \exp(\beta \cdot f_{x_{t-1} x_t}) \cdot r_{x_t}}{p_{x_{t-1} x_t} \cdot \lambda_\beta \cdot r_{x_{t-1}}} \right) \\ &= \log \frac{\pi_{\mathbf{P}_\beta, x_0}}{\pi_{\mathbf{P}, x_0}} + \beta \cdot \sum_{t=1}^T f_{x_{t-1} x_t} + \sum_{t=1}^T \log r_{x_t} - \sum_{t=1}^T \log r_{x_{t-1}} - \sum_{t=1}^T \log \lambda_\beta \\ &= \log \frac{\pi_{\mathbf{P}_\beta, x_0}}{\pi_{\mathbf{P}, x_0}} + \beta \cdot \sum_{t=1}^T f_{x_{t-1} x_t} - T \cdot \log \lambda_\beta + \log r_{x_T} - \log r_{x_0} . \end{aligned}$$

Wird nun der Erwartungswert hinsichtlich  $\mathbf{Q}$  gezogen, resultiert:

---

<sup>122</sup> Die Markovprozesse  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{P}_\beta$  haben Anfangsverteilungen die ihren korrespondierenden invarianten Verteilungen entsprechen. Auf Übergangsmatrizen übertragen sind die Dynamiken  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{P}_\beta$  dann und nur dann äquivalent, wenn  $p_{ij} = 0$  impliziert, dass  $p_{\beta, ij} = 0$  und  $p_{\beta, ij} = 0$  impliziert, dass  $p_{ij} = 0$ .



$$\int \log \frac{d\mathbf{P}_\beta}{d\mathbf{P}} \Big|_{\Sigma_T} d\mathbf{Q} = \sum_{x_0=1}^K \pi_{Q,x_0} \cdot \log \frac{\pi_{P_\beta,x_0}}{\pi_{P,x_0}} + \beta \cdot \sum_{t=1}^T \sum_{x_{t-1}=1}^K \pi_{Q,x_{t-1}} \cdot \sum_{x_t=1}^K q_{x_{t-1}x_t} \cdot f_{x_{t-1}x_t} \\ - T \cdot \log \lambda_\beta + \sum_{x_T=1}^K \pi_{Q,x_T} \cdot \log r_{x_T} - \sum_{x_0=1}^K \pi_{Q,x_0} \cdot \log r_{x_0} .$$

Da die invariante Verteilung  $\pi_Q$  und die Übergangsmatrix  $Q$  zeitlich invariant sind, existiert  $T$ -mal dieselbe Doppelsumme im zweiten Term. Wegen der zeitlichen Invarianz von  $\pi_Q$  sind auch die letzten beiden Terme äquivalent. Somit vereinfacht sich der obige Ausdruck unter Substitution von  $i$  für  $x_0$  und  $x_{t-1}$  sowie  $j$  für  $x_t$  zu:

$$\int \log \frac{d\mathbf{P}_\beta}{d\mathbf{P}} \Big|_{\Sigma_T} d\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \log \frac{\pi_{P_\beta,i}}{\pi_{P,i}} + \beta \cdot T \cdot \sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \sum_{j=1}^K q_{ij} \cdot f_{ij} - T \cdot \log \lambda_\beta .$$

Eine Anwendung des ergodischen Theorems (Rosenblatt 1974, Kapitel V,d) zeigt, dass:

$$h(Q|P) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot H_T(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) \quad \text{sowie} \quad h(Q|P) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \Big|_{\Sigma_T} \quad \mathbf{Q} \Big|_{\Sigma_T} - \text{a.s.} .$$

Dieses Resultat ist auch als das Shannon-MacMillan-Breiman Theorem bekannt. Daraus ergibt sich:

$$h(Q|P) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot H_T(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \left[ H_T(\mathbf{Q}|\mathbf{P}_\beta) + \int \log \frac{d\mathbf{P}_\beta}{d\mathbf{P}} \Big|_{\Sigma_T} d\mathbf{Q} \right] \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \left[ H_T(\mathbf{Q}|\mathbf{P}_\beta) + \sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \log \frac{\pi_{P_\beta,i}}{\pi_{P,i}} + \beta \cdot T \cdot \sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \sum_{j=1}^K q_{ij} \cdot f_{ij} - T \cdot \log \lambda_\beta \right] \\ = h(Q|\mathbf{P}_\beta) + \beta \cdot \sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \sum_{j=1}^K q_{ij} \cdot f_{ij} - \log \lambda_\beta .$$

Für  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  implizieren die Propositionen 3-3 und 3-4, dass ein endliches und eindeutiges  $\beta = \beta(\alpha) > 0$  existiert, so dass

$$M_F^e(P_\beta) = \sum_{i=1}^K \pi_{P_\beta,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\beta,ij} \cdot f_{ij} = \alpha .$$

Deshalb ist  $P_{\beta(\alpha)} \in \Omega_\alpha$ . Der Term  $h(Q|P_\beta)$  ist als einziger Ausdruck auf der rechten Seite von

$$h(Q|P) = h(Q|P_\beta) + \beta \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^K \pi_{Q,i} \cdot \sum_{j=1}^K q_{ij} \cdot f_{ij}}_{=\alpha \text{ da } Q \in \Omega_\alpha} - \log \lambda_\beta$$

nicht konstant. Zudem gilt für alle  $P_\beta$  und  $Q$ , dass  $h(Q|P_\beta) \geq 0$ . Die relative Entropie  $h(Q|P_\beta)$  wird genau dann und nur dann gleich 0 und somit minimal, wenn  $Q = P_\beta$  ist. Dies beweist  $\min_{Q \in \Omega_\alpha} h(Q|P) = h(P_{\beta(\alpha)}|P)$ .

**q.e.d.**

BEWEIS VON THEOREM 3-2: Dieser Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird eine obere, dann eine untere Schranke hergeleitet und danach gezeigt, dass beide zum selben Grenzwert konvergieren.

*Obere Schranke:* Die Anwendung von Chebycheff's Ungleichheit<sup>123</sup> auf die Funktion  $g(x) = e^{T \cdot \beta \cdot x}$  mit  $\beta > 0$  führt zu:

$$\Pr\left\{\frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T f_{x_{t-1}X_t} \geq \alpha\right\} = \Pr\{S_T \geq \alpha\} \leq \frac{E_P[e^{T \cdot \beta \cdot S_T}]}{e^{T \cdot \beta \cdot \alpha}} = e^{-T \cdot \beta \cdot \alpha} \cdot E_P\left[\exp\left(\beta \cdot \sum_{t=1}^T f_{x_{t-1}X_t}\right)\right].$$

Dabei ist  $E_P$  der Erwartungswert hinsichtlich  $\mathbf{P}_\mu$ . Lemma 9-2 impliziert dann, dass dieser Erwartungswert die folgende Gleichung erfüllt:

$$E_P\left[\exp\left(\beta \cdot \sum_{t=1}^T f_{x_{t-1}X_t}\right)\right] = \sum_{x_0=1}^K \sum_{x_T=1}^K a_{\beta, x_0 x_T}^{(T)} \cdot \mu_{x_0}.$$

---

<sup>123</sup> Chebycheff's Ungleichheit (Bucklew 1990, S. 196-197):  $\Pr(x \geq \alpha) \leq \frac{E(g(x))}{g(\alpha)}$  mit  $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ . Dabei ist

$g$  eine nichtnegative, nichtfallende Funktion für die  $x \geq \alpha$  impliziert, dass für eine gegebene Konstante  $\alpha$  auch  $g(x) \geq g(\alpha) > 0$  gelten muss. Hier ist  $g(x)$  mit  $e^{T \cdot \beta \cdot x}$  und  $x$  mit  $S_T$  gleichzusetzen. Zudem gilt die Ungleichheit für jedes feste  $T$ .

Anwendung des Logarithmus auf Chebycheff's Ungleichheit sowie Division durch  $T$  führen zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \cdot \log \Pr\{S_T \geq \alpha\} &\leq -\alpha \cdot \beta + \frac{1}{T} \cdot \log \left( \sum_{x_0} \sum_{x_T} a_{\beta, x_0 x_T}^{(T)} \cdot \mu_{x_0} \right) \\ &= -\alpha \cdot \beta + \frac{1}{T} \cdot \log \left( \sum_{x_0} \sum_{x_T} \frac{\lambda_\beta^T}{\lambda_\beta} \cdot a_{\beta, x_0 x_T}^{(T)} \cdot \mu_{x_0} \right) \\ &= -\alpha \cdot \beta + \log \lambda_\beta + \frac{1}{T} \cdot \log \left( \sum_{x_0} \sum_{x_T} \frac{a_{\beta, x_0 x_T}^{(T)}}{\lambda_\beta^T} \cdot \mu_{x_0} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{T} \cdot \log \Pr\{S_T \geq \alpha\} &\leq -\alpha \cdot \beta + \log \lambda_\beta + o\left(\frac{1}{T}\right).^{124} \end{aligned}$$

Die letzten zwei Schritte folgen aus Proposition 3-2 durch die Beobachtung, dass  $(A_\beta / \lambda_\beta)^T$  gegen  $\ell_\beta \cdot r_\beta^T \gg 0$  konvergiert, eine konstante, positive Matrix mit endlichen Elementen. Für den Grenzwert hinsichtlich  $T$  bedeutet dies:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \log \Pr \left\{ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1} X_t} \geq \alpha \right\} \leq -\alpha \cdot \beta + \log \lambda_\beta .$$

Da diese Ungleichheit für jedes  $\beta > 0$  gilt, muss sie auch für das Infimum über alle  $\beta > 0$  gelten:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \log \Pr \left\{ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1} X_t} \geq \alpha \right\} &\leq \inf_{\beta \in \mathfrak{R}} (\log \lambda_\beta - \alpha \cdot \beta) = -\sup_{\beta \in \mathfrak{R}} (\alpha \cdot \beta - \log \lambda_\beta) \\ &= -h(P_{\beta(\alpha)} | P) . \end{aligned}$$

---

<sup>124</sup> Das Landau-Symbol  $o(\cdot)$  hat die folgende Bedeutung: Die komplizierte Funktion

$$g(T) = \frac{1}{T} \cdot \log \left( \sum_{x_0} \sum_{x_T} \frac{a_{\beta, x_0 x_T}^{(T)}}{\lambda_\beta^T} \cdot \mu_{x_0} \right)$$

kann durch die einfache Funktion  $1/T$  angenähert werden. Dabei gilt der Zusammenhang  $g(T) = o(1/T)$ , mit der Bedeutung:

$$\forall c > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0 : g(T) < c \cdot 1/T .$$

Dabei ist  $c$  konstant. In Worten ausgedrückt bedeutet dies, dass die Funktion  $g(T)$  echt schneller mit  $T$  fällt als  $1/T$  (vergleiche z.B. [http://www.wikipedia.org/wiki/Big\\_O\\_notation](http://www.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation)).

Gemäss Proposition 3-4 wird das Infimum über  $\mathfrak{X}$  innerhalb des Intervalls  $(0, +\infty)$  erreicht. Deshalb lässt sich das Infimum respektive das Supremum über  $\beta \in \mathfrak{X}$  ziehen und nicht bloss über  $\beta > 0$ . Die letzte Gleichheit ist eine Folge der Dekomposition aus Lemma 9-3.

*Untere Schranke:* Hier werden alle Markovketten  $\mathbf{Q}_{\pi_{\mathbf{Q}}}$  mit  $\sum_i \pi_{\mathbf{Q},i} \cdot \sum_j q_{ij} \cdot f_{ij} = \alpha$  in Betracht gezogen.

Für  $\varepsilon > 0$  seien die folgenden zwei Ereignisse betrachtet:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}, X_t} \geq \alpha \right\} \\ B &= \left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \Big|_{\Sigma_T} \leq e^{T \cdot (h(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) + \varepsilon)} \right\} = \left\{ e^{-T \cdot (h(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) + \varepsilon)} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \Big|_{\Sigma_T} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Dabei entspricht die Menge A der Menge aller Pfade, deren empirische Mobilität den Schwellenwert  $\alpha$  erreicht oder überschreitet. Dies bedeutet dass alle betrachteten Übergangsdynamiken Q Elemente dieser Menge sind. Die Menge B entspricht der Menge aller Pfade, deren Radon-Nikodym Ableitung von  $\mathbf{Q}_{\pi_{\mathbf{Q}}}$  hinsichtlich  $\mathbf{P}_{\pi_{\mathbf{P}}}$  auf  $\Sigma_T$  (vgl. Definition 3-5) kleiner oder gleich  $\exp[T \cdot (h(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) + \varepsilon)]$  ist. Da das Shannon-MacMillan-Breiman Theorem besagt, dass die Radon-Nikodym Ableitung gegen  $\exp[T \cdot h(\mathbf{Q}|\mathbf{P})]$  konvergiert (vergleiche Beweis zu Lemma 9-3), sind die betrachteten Übergangsdynamiken Q allesamt auch Elemente der Menge B. Gesucht ist dann die Realisierungswahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Dynamik P:<sup>125</sup>

$$\begin{aligned} \Pr_{\mathbf{P}}\{A\} &\geq \Pr_{\mathbf{P}}\{A \cap B\} = \int I_{A \cap B} \cdot d\mathbf{P} \\ &\geq \int I_{A \cap B} \cdot e^{-T \cdot (h(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) + \varepsilon)} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \Big|_{\Sigma_T} \cdot d\mathbf{P} = e^{-T \cdot (h(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) + \varepsilon)} \cdot \int I_{A \cap B} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \Big|_{\Sigma_T} \cdot d\mathbf{P} \\ &= e^{-T \cdot (h(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) + \varepsilon)} \cdot \underbrace{\int I_{A \cap B} \cdot d\mathbf{Q}}_{\Pr_{\mathbf{Q}}\{A \cap B\}} \end{aligned}$$

<sup>125</sup> Dabei entspricht  $I_{A \cap B}$  der Indikatorfunktion, die den Wert 1 annimmt, sobald ein Integrand Element der Menge  $A \cap B$  ist. Ansonsten nimmt sie den Wert 0 an.

Dabei entspringt die erste Zeile allgemeinen Überlegungen, bei der zweiten Zeile wird der zweiten Darstellung des Ereignisses B Rechnung getragen und in der dritten Zeile wird der sich aufdrängende Variablentausch vollzogen. Zusammengefasst lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $\Pr_P\{A\}$  folgendermassen darstellen:

$$(9-13) \Pr_P\{A\} \geq e^{-T \cdot (h(Q|P) + \varepsilon)} \cdot \Pr_Q\{A \cap B\} .$$

Aus den vorgängig gemachten Bemerkungen zu den beiden Mengen und den betrachteten Übergangsdynamiken Q geht hervor, dass sowohl  $\Pr_Q\{A\}$  (Folge der Ergodizität) wie auch  $\Pr_Q\{B\}$  (Shannon-MacMillan-Breiman Theorem (Rosenblatt 1974, Kapitel V,d)) für  $T \rightarrow \infty$  gegen 1 konvergieren. Somit konvergiert auch  $\Pr_Q\{A \cap B\}$  in Wahrscheinlichkeit gegen 1. Logarithmieren und anschliessendes Umformen von Ungleichung (9-13) führt somit zu

$$(9-14) \frac{1}{T} \cdot \log \Pr_P \left\{ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}, X_t} \geq \alpha \right\} \geq -h(Q|P) - \varepsilon + O\left(\frac{1}{T}\right) .$$

Ungleichung (9-14) gilt für alle Markovketten  $\mathbf{Q}, \pi_{\mathbf{Q}}$ . Somit lässt sich ohne weiteres Q durch  $P_{\beta(\alpha)}$  unter der Bedingung  $\alpha = \sum_i \pi_{P_{\beta(\alpha)}, i} \cdot \sum_j p_{\beta(\alpha), ij} \cdot f_{ij}$  ersetzen. Wird nun noch der Grenzwert hinsichtlich T gezogen, führt dies zur folgenden Darstellung für die untere Schranke in Theorem 3-2:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \Pr \left\{ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}, X_t} \geq \alpha \right\} \geq -\inf_{\varepsilon > 0} (h(P_{\beta(\alpha)} | P) + \varepsilon) = -h(P_{\beta(\alpha)} | P) .$$

**q.e.d.**

HERLEITUNG DER INTERPRETATION DER PERIODENMOBILITÄT:

$$\begin{aligned} M_F^p(P | \alpha) &= e^{-h(P_{\beta(\alpha)}|P)} = \frac{e^{-(T+1) \cdot h(P_{\beta(\alpha)}|P)}}{e^{-T \cdot h(P_{\beta(\alpha)}|P)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Pr(\{S_{T+1} \geq \alpha\})}{\Pr(\{S_T \geq \alpha\})} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Pr(\{S_{T+1} \geq \alpha\} \cap \{S_T \geq \alpha\})}{\Pr(\{S_T \geq \alpha\})} \\ &\quad \text{falls } \{S_{T+1} \geq \alpha\} \subset \{S_T \geq \alpha\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \Pr(\{S_{T+1} \geq \alpha | S_T \geq \alpha\}) . \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt:  $\{S_{T+1} \geq \alpha\} \subset \{S_T \geq \alpha\}$  für alle  $T$  die grösser als eine gewisse Zeitschranke sind.

Für alle Pfade, deren empirische Mobilität zum Zeitpunkt  $T+1$  den gewählten Schwellenwert  $\alpha$  übersteigt ( $S_{T+1} \geq \alpha$ ), gilt:

$$S_{T+1} = \frac{1}{T+1} \cdot \sum_{t=1}^{T+1} f_{X_{t-1}X_t} = \frac{1}{T+1} \cdot \left( f_{X_T X_{T+1}} + \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}X_t} \right) = \frac{1}{T+1} \cdot (f_{X_T X_{T+1}} + T \cdot S_T) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow f_{X_T X_{T+1}} + T \cdot S_T \geq \alpha \cdot (T+1)$$

$$S_T \geq \frac{T+1}{T} \cdot \alpha - \frac{1}{T} \cdot f_{X_T X_{T+1}} = \alpha + \frac{1}{T} \cdot \alpha - \frac{1}{T} \cdot f_{X_T X_{T+1}} = \alpha + \underbrace{\frac{1}{T} \cdot (\alpha - f_{X_T X_{T+1}})}_{\substack{\text{strebt gegen 0} \\ \text{für } T \rightarrow \infty}}$$

Für alle Pfade mit  $S_{T+1} \geq \alpha$  folgt somit für genügend grosse  $T$ , dass auch  $S_T \geq \alpha$  sein muss. Damit gilt asymptotisch für  $T \rightarrow \infty$ :

$$\{S_{T+1} \geq \alpha\} \subset \{S_T \geq \alpha\} .$$

**q.e.d.**

### 9.2.2.1 Allgemeine Form von Theorem 3-2

In Kapitel 3 wurde bloss die für grosse Abweichungen oberhalb des jeweiligen Gleichgewichtsindex adaptierte Form von Theorem 3-2 aufgeführt. Die in Abschnitt 9.2.2 erarbeiteten Beweise gelten jedoch allgemein für grosse Abweichungen der empirischen Mobilität vom gleichgewichtigen Mobilitätsniveau, also auch für solche unterhalb. Deshalb werden hier das Theorem in seiner allgemeinen Form sowie die Implikationen für die Interpretation der entsprechenden Periodenmobilitäten kurz erläutert.

THEOREM 3-2, ALLGEMEINE FORM: Für jedes  $\alpha \in \mathbf{A} = (0, \alpha_{\max}(P))$  existiert ein eindeutiges  $\beta(\alpha) \in \mathfrak{X}$  sowie eine Perron-Frobenius-Transformierte  $P_{\beta(\alpha)}$  von  $P$  so, dass

$$(i) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \log \Pr\{S_T \in \mathbf{A}\} = -\inf_{\alpha \in \mathbf{A}} I(\alpha) = -h(P_{\beta(\alpha)} | P) .$$

$$(ii) \quad M_F^e(P_{\beta(\alpha)}) = \sum_{i=1}^K \pi_{P_{\beta(\alpha)}, i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\beta(\alpha), ij} \cdot f_{ij} = \alpha .$$

Für Abweichungen oberhalb des gleichgewichtigen Mobilitätsniveaus ist die Menge  $\mathbf{A}$  wie gehabt durch das Intervall  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  gegeben. Für Abweichungen unterhalb des Gleichgewichtspfades wird die Menge  $\mathbf{A}$  durch das Intervall  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  beschrieben.<sup>126</sup> Für Schwellenwerte  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  ist Theorem 3-2 dann wie folgt zu lesen:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \log \Pr\{S_T \leq \alpha\} = -h(P_{\beta(\alpha)} | P) .$$

Der Periodenmobilitätsindex wird für alle Schwellenwerte  $\alpha \in (0, \alpha_{\max}(P))$  identisch wie in Definition 3-7 definiert und entsprechend zu Gleichung (3-3) interpretiert:

$$\begin{aligned} M_F^e(P | \alpha) &= e^{-h(P_{\beta(\alpha)} | P)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \Pr(\{S_{T+1} \leq \alpha | S_T \leq \alpha\}) . \end{aligned}$$

Die Interpretation des Periodenindex für  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  ist analog zur Auslegung für Abweichungen oberhalb des Gleichgewichtsniveaus. Er widerspiegelt asymptotisch die Wahrscheinlichkeit, dass sich die empirische Mobilität zum Zeitpunkt  $T + 1$  immer noch auf einem Pfad grosser Abweichungen oberhalb des Schwellenwerts  $\alpha$  befindet, gegeben dies war schon im Zeitpunkt  $T$  der Fall. Die Herleitung verläuft entsprechend. Auch hier gilt, je höher die Konvergenzrate, desto schneller konvergiert die

---

<sup>126</sup> Theoretisch wäre das Intervall oberhalb der Gleichgewichtsmobilität durch  $\alpha \in (M_F^e(P), \infty)$  und dasjenige unterhalb durch  $\alpha \in (-\infty, M_F^e(P))$  gegeben. Da jedoch Abweichungen oberhalb  $\alpha_{\max}(P)$  und unterhalb 0 nicht möglich sind, sind solche Werte für die hier angestellten Betrachtungen irrelevant.

empirische Mobilität gegen den zugehörigen Gleichgewichtsindex, umso niedriger ist der entsprechende Periodenmobilitätsindex. Im Gegensatz zu empirischen Mobilitäten oberhalb  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  bedeutet eine empirische Mobilität unterhalb  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  hingegen, dass sich das Individuum, dessen Einkommenspfad betrachtet wird, in der Vergangenheit unterdurchschnittlich zwischen den Klassen bewegt hat. Konvergenz bedeutet hier somit, dass das Individuum zukünftig öfter die Einkommensklassen wechseln muss. Konvergenz geht hier also mit erhöhter Bewegung einher, während das Verbleiben auf einem Pfad grosser Abweichungen mit fortdauernd unterdurchschnittlicher Bewegung zwischen den Klassen übereinstimmt. Dynamiken mit höherem Bewegungspotential konvergieren bei grossen Abweichungen der empirischen Mobilität unterhalb  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  somit schneller gegen ihren Gleichgewichtsindex, ihr Periodenindex ist somit niedriger als derjenige von Dynamiken mit geringerem Potential für Bewegungen zwischen den Einkommensklassen.

HERLEITUNG DER INTERPRETATION DER PERIODENMOBILITÄT (für  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$ ):

$$\begin{aligned}
 M_F^e(P \mid \alpha) &= e^{-h(P_{\beta(\alpha)}|P)} = \frac{e^{-(T+1)h(P_{\beta(\alpha)}|P)}}{e^{-T h(P_{\beta(\alpha)}|P)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Pr(\{S_{T+1} \leq \alpha\})}{\Pr(\{S_T \leq \alpha\})} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Pr(\{S_{T+1} \leq \alpha\} \cap \{S_T \leq \alpha\})}{\Pr(\{S_T \leq \alpha\})} \\
 &\quad \text{falls } \{S_{T+1} \leq \alpha\} \subset \{S_T \leq \alpha\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \Pr(\{S_{T+1} \leq \alpha \mid S_T \leq \alpha\}).
 \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt:  $\{S_{T+1} \leq \alpha\} \subset \{S_T \leq \alpha\}$  für alle T die grösser als eine gewisse Zeitschranke sind.

Für alle Pfade deren empirische Mobilität zum Zeitpunkt T+1 den gewählten Wert grosser Abweichungen  $\alpha$  unterschreiten ( $S_{T+1} \leq \alpha$ ), gilt:

$$S_{T+1} = \frac{1}{T+1} \cdot \sum_{t=1}^{T+1} f_{X_{t-1}X_t} = \frac{1}{T+1} \cdot \left( f_{X_T X_{T+1}} + \sum_{t=1}^T f_{X_{t-1}X_t} \right) = \frac{1}{T+1} \cdot (f_{X_T X_{T+1}} + T \cdot S_T) \leq \alpha$$

$$\Rightarrow f_{X_T X_{T+1}} + T \cdot S_T \leq \alpha \cdot (T+1)$$



$$S_T \leq \frac{T+1}{T} \cdot \alpha - \frac{1}{T} \cdot f_{X_T X_{T+1}} = \alpha + \frac{1}{T} \cdot \alpha - \frac{1}{T} \cdot f_{X_T X_{T+1}} = \alpha + \underbrace{\frac{1}{T} \cdot (\alpha - f_{X_T X_{T+1}})}_{\text{strebt gegen 0 für } T \rightarrow \infty}$$

Für alle Pfade mit  $S_{T+1} \leq \alpha$  folgt somit für genügend grosse  $T$ , dass auch  $S_T \leq \alpha$  sein muss. Damit gilt asymptotisch für  $T \rightarrow \infty$ :

$$\{S_{T+1} \leq \alpha\} \subset \{S_T \leq \alpha\} .$$

**q.e.d.**

### 9.2.3 Übersicht über die Bedeutungen der Periodenmobilität

Aus den Abschnitten 3.5.1 und 9.2.2.1 wird klar ersichtlich, dass die Interpretation der Periodenmobilität teilweise vom betrachteten Intervall abhängig ist, aus dem der Schwellenwert  $\alpha$  zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Abweichungen der empirischen Mobilität vom Gleichgewichtsindex gewählt wird. Für die beiden möglichen Abweichungsintervalle  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  und  $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$  sind gewisse Bedeutungen identisch, andere gerade gegensätzlich. Tabelle 9-1 fasst diese Bedeutungen für die Periodenmobilität in den beiden Intervallen zusammen.

<b>Periodenmobilitätsindex</b> $M_F^p(P   \alpha) = e^{-h(P_{\beta(\alpha)} P)}$			
$\alpha \in (0, M_F^e(P))$		$\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$	
$h(P_{\beta(\alpha)} P)$ hoch	$h(P_{\beta(\alpha)} P)$ niedrig	$h(P_{\beta(\alpha)} P)$ hoch	$h(P_{\beta(\alpha)} P)$ niedrig
schnelle Konvergenz der empirischen Mobilität gegen den Gleichgewichtsindex	langsame Konvergenz der empirischen Mobilität gegen den Gleichgewichtsindex	schnelle Konvergenz der empirischen Mobilität gegen den Gleichgewichtsindex	langsame Konvergenz der empirischen Mobilität gegen den Gleichgewichtsindex
niedriger Periodenindex	hoher Periodenindex	niedriger Periodenindex	hoher Periodenindex
viel Bewegung	wenig Bewegung	wenig Bewegung	viel Bewegung

**Tabelle 9-1:** Übersicht Periodenmobilität

### 9.2.4 Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung<sup>127</sup>

Hier soll der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten einer stochastischen Matrix  $P$  und der Konvergenzgeschwindigkeit dieser Matrix gegen ihr Gleichgewicht veranschaulicht werden. Dabei sei  $P$  eine primitive  $(K \times K)$ -Übergangsmatrix deren Eigenwerte der Grösse ihres Betrags nach geordnet sind:

$$\lambda_1 = 1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_K| \geq 0.$$

Jedem Eigenwert  $\lambda_i$  sind ein linker  $l_i$  sowie ein rechter Eigenvektor  $r_i$  zugeordnet.<sup>128</sup> Falls alle linken (und somit auch alle rechten) Eigenvektoren linear unabhängig sind, dann ist  $P$  eine diagonalisierbare Matrix. Solche Matrizen werden auch als simple Matrizen bezeichnet. Die Eigenvektoren lassen sich dann normieren, sodass gilt:

$$l'_i \cdot r_j = \begin{cases} 1 & i = j, \quad i, j \in \{1, \dots, K\} \\ 0 & i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, K\} \end{cases} \quad 129$$

Mit  $L = [l_1, l_2, \dots, l_K]$ ,  $R = [r_1, r_2, \dots, r_K]$  und der Diagonalmatrix der Eigenwerte  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$  lässt sich die Übergangsdynamik  $P$  wie folgt diagonalisieren:

$$P = R \cdot \Lambda \cdot L'.$$

Diese Zerlegung lässt sich als Summe umschreiben gemäss:

$$P = \lambda_1 \cdot r_1 \cdot l'_1 + \lambda_2 \cdot r_2 \cdot l'_2 + \dots + \lambda_K \cdot r_K \cdot l'_K.$$

Da beim Potenzieren einer quadratischen Matrix die Eigenvektoren unverändert bleiben und die Eigenwerte entsprechend potenziert werden, ergibt sich für die  $T$ -te Potenz der Übergangsdynamik  $P$  die folgende Darstellung in Matrixschreibweise:

---

<sup>127</sup> Die nachfolgenden Betrachtungen entstammen Lancaster und Tismenetsky (1985).

<sup>128</sup> Die Eigenvektoren der Matrix  $P$  werden rechte, diejenigen der transponierten Matrix  $P'$  linke Eigenvektoren genannt. Im Gegensatz zu den Eigenvektoren entsprechen sich die Eigenwerte einer Matrix  $P$  und ihrer Transponierten.

<sup>129</sup> Bei stochastischen Matrizen besteht der zu  $\lambda_1$  gehörende, mit  $l_1$  gemäss  $l'_1 \cdot r_1 = 1$  normierte rechte Eigenvektor  $r_1$  aus lauter Einsen. Der so normierte linke Eigenvektor  $l_1$  entspricht der Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  dieser Übergangsmatrix.

$$P^T = R \cdot \Lambda^T \cdot L'.$$

Diese Darstellung ist optimal dazu geeignet, die Konvergenz von  $P^T$  zum Gleichgewichtszustand für  $T$  gegen  $\infty$  aufzuzeigen. Die Darstellung als Summe erleichtert das Verständnis für den Konvergenzprozess:

$$P^T = \lambda_1^T \cdot r_1 \cdot \ell_1' + \lambda_2^T \cdot r_2 \cdot \ell_2' + \dots + \lambda_K^T \cdot r_K \cdot \ell_K'.$$

In der Summendarstellung wird klar ersichtlich, dass sich der Einfluss der Eigenvektoren auf die resultierende Verteilung mit der  $T$ -ten Potenz der zugehörigen Eigenwerte entwickelt. Da  $\lambda_1 = 1$  betragsmässig strikt grösser ist als alle anderen Eigenwerte, ist klar, dass  $P^T$  für  $T \rightarrow \infty$  wie folgt konvergiert:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P^T = \Pi = r_1 \cdot \ell_1'.$$

Dabei enthält die Übergangsmatrix  $\Pi$  in ihren Zeilen die Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  von  $P$ . Die Geschwindigkeit, mit der  $P^T$  für  $T \rightarrow \infty$  gegen  $\Pi$  konvergiert, hängt von den Eigenwerten mit Betrag kleiner 1 ab, das bedeutet von  $\lambda_2, \dots, \lambda_K$ . Mit steigendem  $T$  wird der Einfluss der zu  $\lambda_1$  gehörenden Eigenvektoren auf die resultierende Verteilung immer dominanter, bis schliesslich der Einfluss der restlichen Eigenvektoren gänzlich verschwindet.

### 9.2.5 Maximal und minimal erreichbare Mobilität

Zunächst soll hier anhand zweier Beispielmatrizen aus Abschnitt 3.5.2 aufgezeigt werden, wie sich die jeweils maximal mögliche, wenn auch unwahrscheinliche empirische Mobilität  $\alpha_{\max}$  bestimmen lässt. Danach werden einige allgemeine Überlegungen für positive Übergangsmatrizen  $P$  angestellt. Als Bewertungsfunktional dient das Bartholomew-Funktional  $f_{ij} = |i - j|$ . Hierzu seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Das Funktional  $F$  bewertet die Bewegungen von Zustand 1 nach 3 sowie von 3 nach 1 jeweils mit einem Gewicht von 2. Alle Bewegungen über eine Klassengrenze hin-

weg werden mit einem Gewicht von 1 bewertet, das Verharren in einem Zustand generiert das Gewicht 0. Damit ist klar, dass die minimal erreichbare empirische "Mobilität" sowohl für  $P_2$  als auch für  $P_3$  den Wert 0 hat. Falls entlang eines Einkommenspfades nie ein Einkommensklassenwechsel stattfand, erreicht die empirische "Mobilität" entlang dieses Pfades den minimal möglichen Wert 0.<sup>130</sup>

Die maximal erreichbare empirische Mobilität lässt sich nicht ganz so einfach bestimmen. Im Falle von  $P_2$  sind die Wahrscheinlichkeiten ( $p_{13}$  und  $p_{31}$ ) für Bewegungen mit Gewicht 2 zwar klein, jedoch grösser als 0. Somit ist klar, dass in diesem Fall ein Kreispfad der Länge  $N = 2$ , welcher von Zustand 1 nach 3 und danach wieder nach 1 führt, die empirische Mobilität maximal werden lässt. Dies bedeutet im Falle der Matrix  $P_2$  sowie aller anderen (3×3)-Matrizen mit positiven Wahrscheinlichkeiten  $p_{13}$  und  $p_{31}$ , dass die maximal mögliche empirische Mobilität, wenngleich höchst unwahrscheinlich, den folgenden Wert annimmt:

$$\alpha_{\max}(P_2) = \alpha_{\max}^* = \frac{1}{2} \cdot (f_{13} + f_{31}) = 2 .$$

Da  $P_2$  eine positive Übergangsmatrix ist, ist dieser Wert identisch mit der für alle (3×3)-Transitionsmatrizen, bei gewähltem Bartholomew-Funktional, maximal möglichen Mobilität  $\alpha_{\max}^*$ . Im Fall der Matrix  $P_3$  ist die Wahrscheinlichkeit  $p_{13}$  eines direkten Wechsels von Zustand 1 nach 3 gleich 0. Diese Bewegung ist also bei der Dynamik  $P_3$  nicht möglich. Die maximal mögliche empirische Mobilität wird in diesem Fall zum Beispiel durch den Kreispfad der Länge 3 erreicht, welcher von Zustand 1 nach 2, dann nach 3 und wieder zurück nach 1 führt. Dies ergibt für die Dynamik  $P_3$  die folgende maximal mögliche empirische Mobilität:

$$\alpha_{\max}(P_3) = \frac{1}{3} \cdot (f_{12} + f_{23} + f_{31}) = \frac{4}{3} < \alpha_{\max}^* .$$

---

<sup>130</sup> Dies gilt für alle Mobilitätsfunktionale gemäss Definition 3-1 sowie alle irreduziblen Übergangsdynamiken mit positiver Spur.

### 9.2.5.1 Konvergenz gegen die maximale empirische Mobilität

Da der Gleichgewichtsindex  $M_F^e(P_\beta)$  von  $P_\beta$  für  $\beta \rightarrow \infty$  gegen  $\alpha_{\max}(P)$  konvergiert, ist es interessant,  $P_\beta$  für  $\beta = \infty$  zu betrachten. Für das hier betrachtete Bartholomew-Funktional lässt sich die gesuchte Matrix  $P_\infty$  für geradzahlige  $K$  und positive Übergangsmatrizen  $P$  leicht durch ein blosses Gedankenexperiment herleiten.<sup>131</sup> Da das Funktional  $F$  für geradzahlige  $K$  auf jeder Zeile ein eindeutiges Maximum besitzt und weil bei der Berechnung von  $P_\beta$  für steigende  $\beta$  diese Maxima immer stärker betont werden, konvergiert  $P_\beta$  für  $\beta \rightarrow \infty$  gegen eine Matrix  $P_\infty^g$ , bei welcher sich die Übergangswahrscheinlichkeiten für die ersten  $K/2$  Zeilen in der  $K$ 'ten Spalte und für die zweiten  $K/2$  Zeilen in der ersten Spalte befinden.

$$P_\infty^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}} \right\} \frac{K}{2} \text{ Zeilen} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}} \right\} \frac{K}{2} \text{ Zeilen} \end{array}$$

Für ungeradzahlige  $K$  ist die Situation geringfügig erschwert, da die Gewichte des Funktionals in der  $(K+1)/2$ 'ten Zeile (mittlere Zeile) für das erste und das  $K$ 'te Element dasselbe Zeilenmaximum annehmen. Für  $\beta \rightarrow \infty$  konvergiert diese mittlere Zeile der Perron-Frobenius-Transformierten  $P_\beta$  deshalb gegen die mittlere Zeile der Dynamik  $P_\infty^u$ , bei welcher das Gewicht vollständig auf die Elemente 1 und  $K$  verteilt ist. Die Situation für die  $(K+1)/2$ 'te Zeile dieser asymptotisch erreichten Matrix  $P_\infty^u$

---

<sup>131</sup> Die nachfolgend in diesem Unterabschnitt erarbeiteten allgemeineren Grundlagen lassen sich ohne weiteres nicht nur auf das Bartholomew-Funktional anwenden, sondern analog auch auf andere Funktionale, welche grössere Bewegungen mit höherer Gewichtung bewerten. So zum Beispiel auch auf das in dieser Arbeit erwähnte Funktional der quadrierten Distanz. Für das Funktional des unbedingten Klassenwechsels gelten sie jedoch nicht.

lässt sich, unter Zuhilfenahme von Definition 3-6, wie folgt beschreiben:

$$\sum_{j=1}^K p_{\beta, K+1/2 j} = 1 \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} p_{\beta, K+1/2 1} + p_{\beta, K+1/2 K} = \frac{p_{K+1/2 1} \cdot r_{\beta, 1} \cdot e^{\beta f}}{\lambda_{\beta} \cdot r_{\beta, K+1/2}} + \frac{p_{K+1/2 K} \cdot r_{\beta, K} \cdot e^{\beta f}}{\lambda_{\beta} \cdot r_{\beta, K+1/2}} = 1$$

mit  $f_{K+1/2 1} = f_{K+1/2 K} = f$  .

Dies lässt sich vereinfachen zu

$$p_{K+1/2 1} \cdot r_{\beta, 1} \cdot c_{\beta} + p_{K+1/2 K} \cdot r_{\beta, K} \cdot c_{\beta} = 1 \quad \text{mit } c_{\beta} = \frac{e^{\beta f}}{\lambda_{\beta} \cdot r_{\beta, K+1/2}} .$$

Der zu  $\lambda_{\beta}$  gehörende rechte Eigenvektor  $r_{\beta}$  von  $A_{\beta}$  konvergiert für  $\beta \rightarrow \infty$  gegen einen Vektor, dessen 1'tes und K'tes Element identisch sind, während die restlichen Elemente den Wert 0 annehmen.<sup>132</sup> Für das erste Element der mittleren Zeile der Perron-Frobenius-Matrix  $P_{\infty}$  bedeutet dies folglich

$$p_{\beta, K+1/2 1} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{p_{K+1/2 1} \cdot r_{\beta, 1} \cdot c_{\beta}}{p_{K+1/2 1} \cdot r_{\beta, 1} \cdot c_{\beta} + p_{K+1/2 K} \cdot r_{\beta, K} \cdot c_{\beta}} = \frac{p_{K+1/2 1}}{p_{K+1/2 1} + p_{K+1/2 K}} .$$

Damit lässt sich die Form von  $P_{\infty}^u$  für ungeradzahlige Dimensionen K folgendermaßen darstellen:

$$P_{\infty}^u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ x & 0 & \dots & 0 & 1-x \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } x = \frac{p_{K+1/2 1}}{p_{K+1/2 1} + p_{K+1/2 K}} .$$

Sowohl für geradzahlige wie auch für ungeradzahlige Dimensionen K resultiert somit für  $\beta \rightarrow \infty$  asymptotisch aus jeder beliebigen Anfangsverteilung sofort eine Dynamik, bei der die Individuen immer vom ersten in den K'ten Zustand und wieder zurück wechseln. Daraus resultiert der für positive Matrizen und das Bartholomew-

<sup>132</sup> Die Matrix  $A_{\beta}$  ist in Abschnitt 3.4.1 in Definition 3-6 beschrieben.

Funktional typische Kreispfad  $\{1, K, 1\}$ , welcher die maximal mögliche Mobilität charakterisiert, die für jede positive stochastische  $(K \times K)$ -Matrix  $P$ , wenn auch mit verschwindender Wahrscheinlichkeit, erreichbar ist. Wie im Beispiel mit der positiven Testmatrix  $P_2$  dargestellt, resultiert für beliebige positive Übergangsmatrizen  $P$  die maximal mögliche Mobilität

$$\alpha_{\max}(P) = \alpha_{\max}^* = \frac{1}{2} \cdot (f_{1K} + f_{K1}) = K - 1 = M_F^e(P_\infty) ,$$

welche mit der gleichgewichtigen Mobilität der korrespondierenden asymptotischen Perron-Frobenius-Matrix  $P_\infty$  übereinstimmt.

Da bei positiven Transitionsmatrizen die Individuen zum Erreichen der maximal möglichen Mobilität immer zwischen den Zuständen 1 und  $K$  hin und her wechseln müssen, lässt sich der Endpunkt der Kurve der Periodenmobilität (für  $\gamma = 1$  respektive  $\alpha = \alpha_{\max}^*$ , vergleiche Abbildung 3-1 und Abbildung 9-6) für solche Matrizen ebenfalls leicht bestimmen. Sowohl für geradzahlige als auch für ungeradzahlige Dimensionen  $K$  konvergiert die Gleichgewichtsverteilung von  $P_\beta$  für  $\beta \rightarrow \infty$  gegen die stationäre Verteilung der entsprechenden Matrix  $P_\infty$ . Diese Verteilung ist gegeben durch den  $(K \times 1)$ -Vektor  $\pi_{P_\infty} = [0.5 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0.5]'$ . Damit lässt sich die Periodenmobilität für die maximal mögliche Abweichung  $\alpha_{\max}(P)$  leicht ermitteln:

$$\begin{aligned} h(P_\infty | P) &= \sum_{i=1}^K \pi_{P_\infty,i} \cdot \sum_{j=1}^K p_{\infty,ij} \cdot \log \frac{p_{\infty,ij}}{p_{ij}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \log \frac{1}{p_{1K}} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \log \frac{1}{p_{K1}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (\log(p_{1K}) + \log(p_{K1})) = -\frac{1}{2} \cdot \log(p_{1K} \cdot p_{K1}) \\ \Rightarrow M_F^p(P | \alpha_{\max}) &= e^{-h(P_\infty|P)} = \left( e^{\log(p_{1K} \cdot p_{K1})} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p_{1K} \cdot p_{K1}} \end{aligned}$$

Für  $\gamma$  von 0 bis 1 respektive für  $\alpha$  von  $M_F^e(P)$  bis  $\alpha_{\max}^*$  nimmt also die Periodenmobilität der positiven stochastischen Matrix  $P$  nichtlinear von 1 gegen  $\sqrt{p_{1K} \cdot p_{K1}}$  ab.

### 9.2.5.2 Konvergenz gegen die minimale empirische Mobilität

Da der Gleichgewichtsindex  $M_F^e(P_\beta)$  von  $P_\beta$  für  $\beta \rightarrow -\infty$  gegen 0 konvergiert, ist es von Interesse,  $P_\beta$  für  $\beta = -\infty$  zu untersuchen.  $A_\beta$  konvergiert für  $\beta \rightarrow -\infty$  gegen die Diagonalmatrix mit den Elementen der Hauptdiagonalen der zugrundeliegenden positiven Übergangsdynamik  $P$ . Der grösste Eigenwert  $\lambda_\beta$  von  $A_\beta$  konvergiert gegen  $\lambda_{-\infty}$ , das grösste Element der Hauptdiagonalen von  $P$ :

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \lambda_\beta = \lambda_{-\infty} = \max_{i \in \{1, \dots, K\}} p_{ii} .$$

$P_\beta$  konvergiert für  $\beta \rightarrow -\infty$  gegen eine Übergangsmatrix, auf deren Hauptdiagonalen die Elemente der Hauptdiagonalen der Dynamik  $P$ , dividiert durch das maximale Diagonalelement von  $P$ , stehen. Gemäss Theorem 3-2 entwickelt sich die Realisationswahrscheinlichkeit für Abweichungen der empirischen Mobilität unterhalb des Schwellenwerts  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  gemäss

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \log \Pr\{S_T \leq \alpha\} = -\alpha \cdot \beta(\alpha) + \log \lambda_{\beta(\alpha)} = -h(P_{\beta(\alpha)} | P) .$$

Für  $\alpha = 0$  respektive  $\beta = -\infty$  ergibt sich daraus für die relative Entropie der Perron-Frobenius-Transformierten  $P_{-\infty}$  hinsichtlich  $P$  der folgende Zusammenhang

$$h(P_{-\infty} | P) = -\log \lambda_{-\infty} .$$

Damit konvergiert die Periodenmobilität für  $\beta \rightarrow -\infty$  gegen  $\lambda_{-\infty}$ , das grösste Hauptdiagonalelement der zugrundeliegenden Übergangsdynamik  $P$ :

$$M_F^p(P | \alpha = 0) = e^{-h(P_{-\infty} | P)} = \lambda_{-\infty} .$$

Dieser Zusammenhang gilt auch bei Übergangsdynamiken, bei denen das maximale Hauptdiagonalelement mehrfach vorkommt. Im Gegensatz zur Konvergenz gegen die maximal mögliche empirische Mobilität  $\alpha_{\max}$  gelten die hier für die Konvergenz gegen die minimal mögliche empirische Mobilität 0 angestellten Überlegungen für alle denkbaren Mobilitätsfunktionale gemäss Definition 3-1.

Die Entwicklung der Periodenmobilität gegen die beiden Extremwerte 0 und  $\alpha_{\max}$  kann in Abbildung 9-10 anhand der Übergangsmatrizen  $P_2$  und  $P_x$  aus Abschnitt 3.5.2 nachvollzogen werden.



### 9.2.6 Resultate aller erwähnten Mobilitätsfunktionale

In einer Übersicht sollen hier auch die Resultate der beiden anderen Gleichgewichtsindices dargestellt werden. Hierbei werden die Ergebnisse aus den Berechnungen mit dem Index der unbedingten Wahrscheinlichkeit des Verlassens der gegenwärtigen Klasse sowie dem Index der quadrierten Distanz den Resultaten des Bartholomew-Index gegenübergestellt. Zusätzlich zu den fünf Testmatrizen aus Abschnitt 3.5.2 werden hier noch die Matrizen  $P_4$  und  $P_5$  betrachtet.

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.399 & 0.001 \\ 0.301 & 0.4 & 0.299 \\ 0.099 & 0.202 & 0.7 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.4 & 0.05 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.05 & 0.2 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Dabei entspricht  $P_4$  einer Abwandlung der einzigen, hier untersuchten, nicht positiven Testmatrix  $P_3$ . Sie wurde aufgrund einer Anregung desselben Referees zu Aebi, Neusser und Steiner (2002 b) eingeführt, welcher auch die Betrachtung des Index der quadrierten Distanz vorgeschlagen hatte. Da die Berechnungen der Periodenmobilität auf einem Prozentsatz  $\gamma$  der maximal möglichen Abweichung der empirischen Mobilität vom Gleichgewichtsindex beruhen, welche im Falle des Bartholomew-Funktionalis für die Matrizen  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  und  $P_x$  gleich ist, bei  $P_3$  hingegen wegen des kleineren  $\alpha_{\max}$  geringer ausfällt, entsprechen sie einer relativen Optik. Da diese relative Optik bei positiven Matrizen mit gleichem Gleichgewichtsindex auch gerade einem absoluten Vergleich entspricht, wurde hier die Matrix  $P_4$  eingeführt. Ihre Matrixelemente sind entweder gleich oder weichen nur minim von denjenigen der Matrix  $P_3$  ab. Mit  $P_4$  kann abgeschätzt werden, wie sich die Periodenmobilität einer  $P_3$ -ähnlichen Dynamik bei einem absoluten Vergleich mit den restlichen Matrizen verhält.

Die Matrix  $P_5$  wird hier betrachtet, weil sich anhand dieser Dynamik und der Matrix  $P_1$  demonstrieren lässt, wie sehr sich die Verläufe der Periodenmobilitäten von Matrizen mit derselben Periodenmobilität bei maximaler Abweichung vom Gleichgewichtsindex  $M_F^p(P | \alpha_{\max}) = \sqrt{p_{1K} \cdot p_{K1}}$  ähneln. Es handelt sich bei diesen beiden Dynamiken um Matrizen, deren Periodenmobilität für  $\gamma = 0$  und  $\gamma = 1$  identisch ist. Wie aus den Berechnungen ersichtlich wird, gilt die Gleichheit bei  $\gamma = 1$  jedoch nur bei den beiden Indices, welche grössere Sprünge mit grösseren Gewichten bewerten. Der Index des

Verlassens der gegenwärtigen Klasse fällt hier in dieser Beziehung aus dem Rahmen. Zunächst wird jedoch in Tabelle 9-2 eine Zusammenfassung der Ergebnisse aller hier untersuchten Indexmasse und aller Testmatrizen gegeben.

		Übergangsmatrizen							
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>x</sub>	P <sub>mobil</sub>	P <sub>ident</sub>
Bartholomew	Gleichgewichtsindex	0.46667	0.46667	0.46667	0.46667	0.46667	0.46667	0.88889	0.002667
	Periodenindex $\gamma = 0.5$	0.45540	0.54949	0.75481	0.37988	0.45744	0.47204	0.78414	0.06295
	$\alpha_{\max}(P)$	2	2	4/3	2	2	2	2	2
quadierte Distanz	Gleichgewichtsindex	0.53333	0.6	0.53333	0.53333	0.53333	0.53333	1.33333	0.004
	Periodenindex $\gamma = 0.5$	0.37799	0.50618	0.70390	0.21850	0.37805	0.37847	0.77037	0.06297
	$\alpha_{\max}(P)$	4	4	2	4	4	4	4	4
Klassenwechsel	Gleichgewichtsindex	0.43333	0.4	0.43333	0.43333	0.43333	0.43333	0.66667	0.002
	Periodenindex $\gamma = 0.5$	0.86261	0.84045	0.86237	0.86238	0.87236	0.93193	0.93199	0.08880
	$\alpha_{\max}(P)$	1	1	1	1	1	1	1	1
"Konvergenzindices"	Prais' Index	0.65	0.6	0.65	0.65	0.65	0.65	1	0.003
	Eigenwertindex	0.65	0.6	0.65	0.65	0.65	0.65	1	0.003
	zweitgrösster Eigenwert	0.3854	0.4268	0.4	0.3994	0.3459	0.15	1	0.003
	Konvergenzgeschwindigkeit	0.4868	0.5565	0.5108	0.5098	0.4244	0.1625	$+\infty$	0.003005
	Determinantenindex	0.9475	0.87	0.94	0.9403	0.97	0.8725	1	0.005991
Gleichgewichtsverteilung		$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}'$

**Tabelle 9-2:** Zusammenfassung aller Resultate

Die folgenden Abbildungen halten die Entwicklung der Periodenindices für alle Testmatrizen, mit Ausnahme von P<sub>x</sub>, über den gesamten Definitionsbereich des Parameters  $\gamma$  fest. Die zu jeder Abbildung festgehaltenen Rangierungen der Übergangsmatrizen gelten jeweils für alle  $\gamma \in (0, 1)$ . Für das Bartholomew-Funktional werden die Rangierungen zusätzlich auch für eine absolute Optik dargestellt und diskutiert. In Abschnitt 9.2.6.4 wird dann, wiederum anhand des Bartholomew-Funktional, das Verhalten der einen Schnittpunkt aufweisenden Periodenmobilitätskurven von P<sub>2</sub> und P<sub>x</sub> ausführlich diskutiert. Diese Diskussion wird über den gesamten Definitionsbereich des Schwellenwerts  $\alpha$  für Abweichungen der empirischen von der gleichgewichtigen Mobilität geführt.

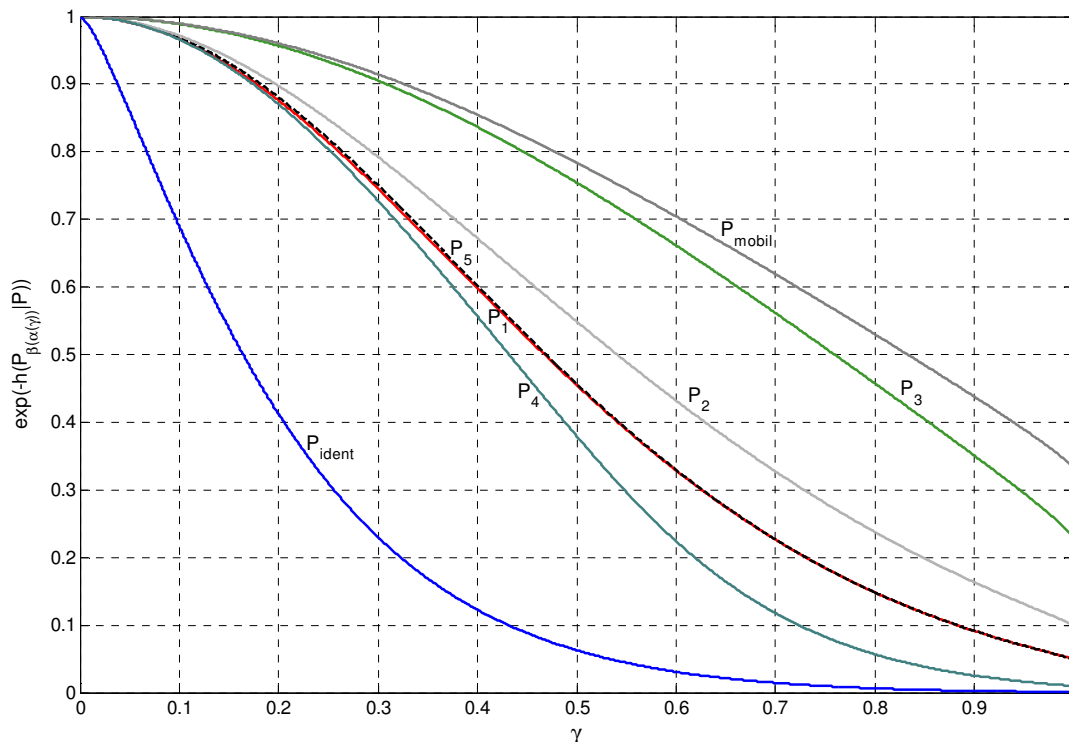
### 9.2.6.1 Bartholomew-Funktional

Um den Unterschied zwischen der relativen und einer absoluten Optik bei der Betrachtung der Periodenmobilität zu verdeutlichen, werden hier unterschiedliche Formulierungen der Wahl des Schwellenwerts  $\alpha$  gegeben. In der ersten Formulierung wird nochmals auf den relativen Periodenmobilitätsvergleich eingegangen, so wie er in Abbildung 9-6 für alle Beispieldynamiken mit Ausnahme von  $P_x$  dargestellt wird:

- $M_B^p(P | \alpha(\gamma)) = e^{-h(P_B(\alpha(\gamma))|P)}$  mit  $\alpha(\gamma) = M_B^e(P) + \gamma \cdot (\alpha_{\max}(P) - M_B^e(P))$ ,  
wobei  $0 < \gamma < 1$ .

Wird die Periodenmobilität gegen den Prozentsatz  $\gamma$  der maximalen Abweichung der empirischen Mobilität vom entsprechenden Gleichgewichtsindex aufgetragen, so kann das Verhalten von unterschiedlichen Matrizen problemlos verglichen werden. Dies deshalb, weil die Periodenmobilität einer Dynamik sowohl von ihrer Gleichgewichtsmobilität  $M_B^e(P)$  als auch von der maximal möglichen grossen Abweichung  $\alpha_{\max}(P)$  abhängt, was eine relative Optik bei Vergleichen nahelegt. So lassen sich Dynamiken immer bei einem bestimmten Prozentsatz der maximal möglichen Abweichung  $\alpha_{\max}(P) - M_B^e(P)$  vergleichen. Allerdings bedeuten z.B. 50 % der maximal möglichen Abweichung für die Matrizen  $P_3$  und  $P_4$  in absoluten Grössen nicht dasselbe. Für  $P_3$  bedeutet eine 50 % Abweichung eine Distanz von 0.4333 vom Gleichgewichtsindex, bei  $P_4$  beträgt diese Abweichung 0.7667. Diesem Faktum gilt es bei relativen Vergleichen immer Rechnung zu tragen. Die relative Betrachtungsweise ermöglicht jedoch als einzige, dass sich alle Dynamiken problemlos rangieren lassen. Im Fall der sieben betrachteten Testmatrizen ergibt sich auf dem gesamten Definitionsbereich von  $\gamma$  die folgende Rangierung, die auch in Abbildung 9-6 ersichtlich ist:

$$P_{\text{ident}} \prec_p P_4 \prec_p P_1 \prec_p P_5 \prec_p P_2 \prec_p P_3 \prec_p P_{\text{mobil}} .$$



**Abbildung 9-6:** Periodenmobilität basierend auf dem Bartholomew-Funktional

Bei den vier positiven Matrizen mit identischem Gleichgewichtsindex  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  und  $P_5$  entspricht die relative Optik auch gleich der absoluten. Die ansonsten ziemlich ähnlichen Dynamiken  $P_3$  und  $P_4$  unterscheiden sich bei einem relativen Vergleich deutlich hinsichtlich ihrer Periodenmobilität. Bei gleichen prozentualen Abweichungen vom identischen Gleichgewichtsindex erweist sich die nicht positive Matrix  $P_3$  als deutlich mobiler als die positive Dynamik  $P_4$ . Dies obschon beide Matrizen in etwa dasselbe Ausmass an Bewegung beinhalten müssten. Bei der relativen Optik würde sich somit ein Vergleich der Dynamiken  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_5$  mit  $P_4$  anstelle von  $P_3$  aufdrängen, um eine Abschätzung der absoluten Rangfolge dieser Dynamiken zu erhalten. Diese These wird durch die nachfolgenden Betrachtungen zu absoluten Abweichungen erhärtet werden.

Auch der Vergleich zwischen den Übergangsmatrizen  $P_1$  und  $P_5$ , welche neben demselben Gleichgewichtsindex auch dieselbe Periodenmobilität für  $\gamma = 1$  teilen, ist interessant. Dabei stellt sich heraus, dass die Entwicklung der Periodenmobilität für beide Dynamiken ähnlich verläuft. Trotzdem lassen sich die beiden Matrizen hinsichtlich ihrer Periodenmobilität eindeutig unterscheiden. So ist  $P_5$  auf dem gesamten

Definitionsbereich von  $\gamma$  gleich mobil oder mobiler als  $P_1$ . Gleichheit herrscht bei  $\gamma = 0$  und  $\gamma = 1$ . Trotz dem ähnlichen Verlauf lassen sich die beiden Übergangsdynamiken also eindeutig rangieren.

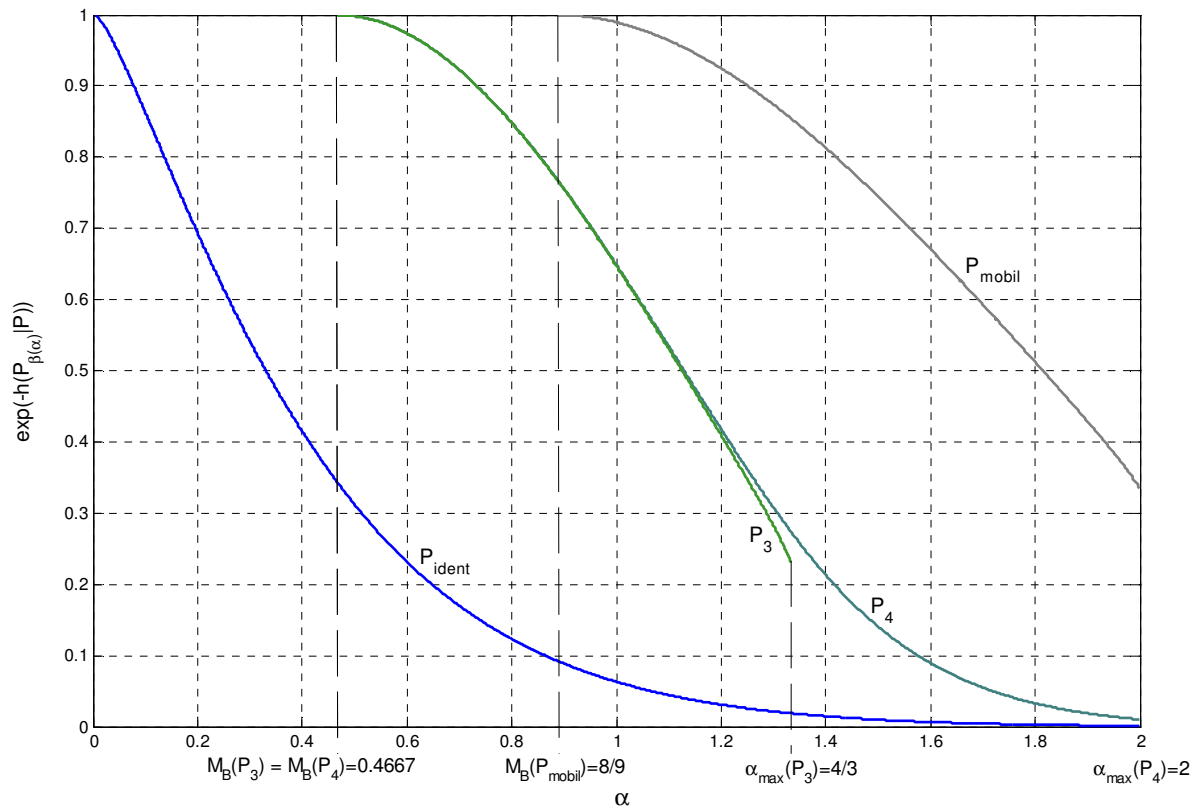
In absoluten Zahlen ausgedrückt ist eine z.B. 50 %'ige grosse Abweichung von  $P_{\text{ident}}$  am grössten, gefolgt von den in dieser Hinsicht identischen Matrizen  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  und  $P_5$ , danach folgen die Dynamik  $P_{\text{mobil}}$  und mit der geringsten absoluten Abweichung  $P_3$ . Dies wird bei den folgenden Betrachtungen mit absolutem Charakter noch deutlich gemacht.

Bei der ersten Betrachtung mit absolutem Charakter wird die Periodenmobilität direkt dem Schwellenwert  $\alpha$  gegenübergestellt:

- $M_B^p(P | \alpha) = e^{-h(P_{\beta(\alpha)}|P)}$  wobei  $M_B^e(P) < \alpha < \alpha_{\text{max}}(P)$  .

Hierbei ergeben sich für Matrizen mit unterschiedlichem Gleichgewichtsindex natürlich unterschiedliche Anfangspunkte der Kurve des Verlaufs der Periodenmobilität, da diese jeweils bei  $\alpha = M_B^e(P)$  beginnt. Zudem enden diese Verläufe bei Matrizen mit unterschiedlichen  $\alpha_{\text{max}}(P)$  auch verschieden. Für positive Matrizen mit demselben Gleichgewichtsindex ändert sich jedoch im Vergleich zur relativen Betrachtungsweise nichts. Solche Dynamiken lassen sich immer über den gesamten Bereich möglicher Schwellenwerte  $\alpha$  oberhalb des Gleichgewichtsindex rangieren, die Rangfolge hängt nicht von der Optik der Betrachtungsweise ab. In Abbildung 9-7 (a) sind die Verläufe der Periodenmobilität für die Matrizen  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_{\text{mobil}}$  und  $P_{\text{ident}}$  wiedergegeben. Die restlichen Matrizen wurden hier weggelassen, da sich ihre Position, verglichen mit  $P_4$ , durch den geänderten Blickwinkel nicht verschiebt.

Bei gleichen Schwellenwerten  $\alpha$  zeigt sich, dass sich die Verläufe der Periodenmobilitäten bei den beiden ähnlichen Dynamiken  $P_3$  und  $P_4$  über einen grossen Bereich ziemlich entsprechen. Erst bei Abweichungen in der Nähe von  $\alpha_{\text{max}}(P_3) = 4/3$  erweist sich die Dynamik  $P_4$  als deutlich mobiler. Bei Abweichungen oberhalb  $\alpha = 4/3$  lassen sich die beiden Matrizen nicht mehr vergleichen.



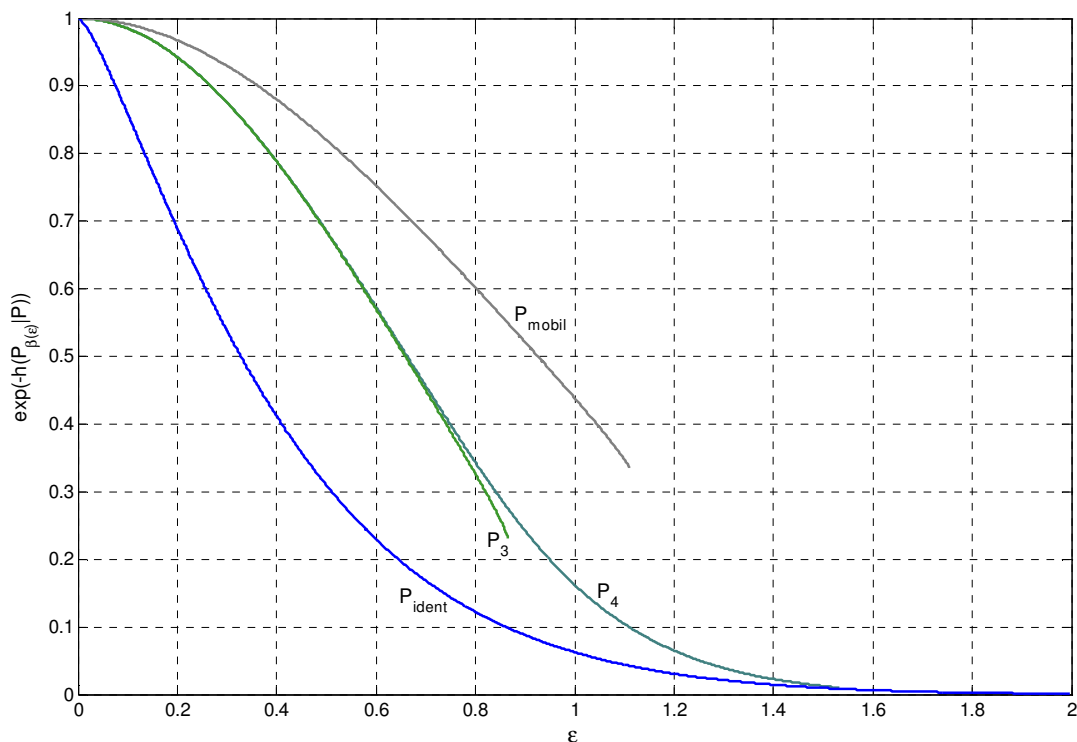
**Abbildung 9-7 (a):** Periodenmobilitäten bei absolutem Masstab

Bei der hier gewählten Optik lassen sich die vier Dynamiken bloss im Bereich  $8/9 = M_B^e(P_{\text{mobil}}) < \alpha < \alpha_{\text{max}}(P_3) = 4/3$  vergleichen. Diese Situation ist natürlich wesentlich weniger komfortabel als bei relativen Vergleichen. Auch macht ein solcher Vergleich wenig Sinn, da identisches  $\alpha$  nicht gleichbedeutend mit absolut respektive relativ gleich grosser Distanz des Schwellenwerts vom entsprechenden Gleichgewichtsindex sein muss.

Bei der absoluten Optik ist das Szenario vorzuziehen, wo anstelle des Schwellenwerts  $\alpha$  die absolute Distanz  $\varepsilon$  vom entsprechenden Gleichgewichtsindex betrachtet wird.

- $M_B^p(P | \alpha(\varepsilon)) = e^{-h(P_{\beta(\alpha(\varepsilon))}|P)}$  mit  $\alpha(\varepsilon) = M_B^e(P) + \varepsilon$ ,  
wobei  $0 < \varepsilon < \alpha_{\text{max}}(P) - M_B^e(P)$ .

Wird die Periodenmobilität gegen diese absolute Distanz  $\varepsilon$  aufgetragen, dann beginnen die Verläufe aller Dynamiken wieder im selben Punkt, nämlich bei  $\varepsilon = 0$ . In Abbildung 9-7 (b) ist die Periodenmobilität für die Dynamiken  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_{\text{mobil}}$  und  $P_{\text{ident}}$  so dargestellt. Die restlichen Testmatrizen wurden aus denselben Gründen wie bei den Betrachtungen mit dem Schwellenwert  $\alpha$  weggelassen.



**Abbildung 9-7 (b):** Periodenmobilitäten bei absolutem Massstab

Im Vergleich mit Abbildung 9-7 (a) wurden hier einfach alle Kurven an den linken Rand der Grafik verschoben. Vergleiche zwischen den vier Dynamiken lassen sich hier im Intervall  $0 < \varepsilon < \alpha_{\text{max}}(P_3) - M_B^e(P_3) = 13/15$  anstellen. Das Vergleichsintervall lässt sich also bei dieser Betrachtungsweise auf den gesamten Definitionsbereich des Periodenindex der Übergangsdynamik  $P_3$  vergrößern. Bei Übergangsmatrizen mit unterschiedlichem Gleichgewichtsindex ist der Vergleich bei gleichen absoluten Abweichungen  $\varepsilon$  vom jeweiligen Gleichgewichtsindex sicher sinnvoller als der Vergleich bei identischen Werten von  $\alpha$ .

Die relative Optik hat also den Vorteil einer uneingeschränkten Vergleichbarkeit aller Dynamiken. Sollen jedoch absolute Bewegungen verglichen werden, wie hier im

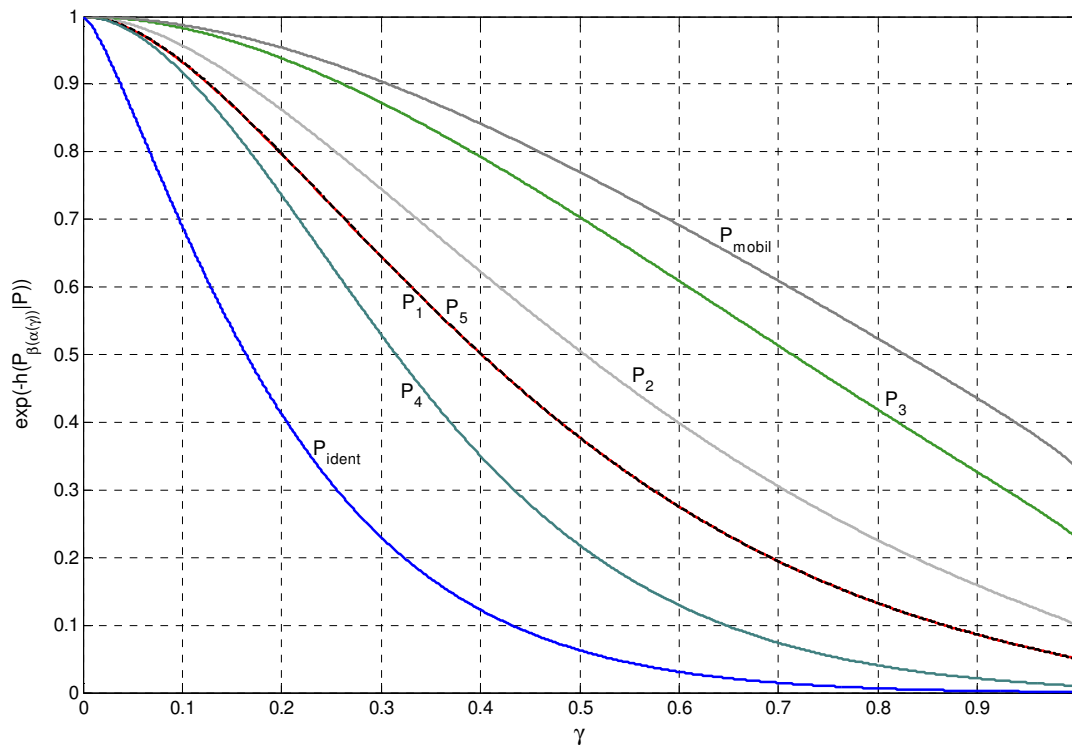
Beispiel mit der nicht positiven Matrix  $P_3$  und ihrem positiven Pendant  $P_4$ , dann sollte neben der relativen Optik auch ein absoluter Vergleich in Betracht gezogen werden. Bei Matrizen mit dem selben Gleichgewichtsindex und dem gleichen  $\alpha_{\max}(P)$  erübrigt sich die Diskussion sowieso, absolute und relative Optik entsprechen sich hier. Ist dies nicht gegeben, wie bei den Vergleichen der Dardanoni-Matrizen in Abschnitt 3.5.2, dann liesse sich eine Art absoluter Vergleich erreichen, wenn die aus dem Rahmen fallende Matrix (hier die Matrix  $P_3$ ) durch eine, hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit von entsprechenden Bewegungen zwischen den Klassen, ähnliche Dynamik (hier  $P_4$ ) ersetzt wird, wobei diese neue Matrix über dieselben Eckdaten ( $M_B^e(P)$  und  $\alpha_{\max}(P)$ ) wie die restlichen Matrizen verfügen muss.

#### 9.2.6.2 Funktional der quadrierten Distanz

Der Index der quadrierten Distanz ist, wie Bartholomew's Index, ein Mobilitätsmass, dessen Mobilitätsfunktional einen Klassenwechsel umso stärker gewichtet, je weiter die Klassen auseinander liegen. Es erstaunt somit kaum, dass die Schlussfolgerungen aus den Berechnungen für die Periodenmobilität denjenigen des Bartholomew-Funktional stark ähneln. So können bezüglich einer relativen respektive einer absoluten Optik identische Schlussfolgerungen gezogen werden. Deshalb wird hier auch nur noch die relative Betrachtungsweise dargestellt. Im Gegensatz zum Bartholomew-Funktional unterscheidet sich beim Funktional der quadrierten Distanz der Gleichgewichtsindex der Dynamik  $P_2$  von denjenigen der Matrizen  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  und  $P_5$ . Somit ist die relative Optik nur mehr bei einem Vergleich der Dynamiken  $P_1$ ,  $P_4$  und  $P_5$  mit der absoluten identisch. Dennoch resultiert über den gesamten Definitionsbereich des Prozentsatzes maximal möglicher Abweichungen vom Gleichgewichtsindex  $\gamma$  dieselbe Rangfolge aller Testmatrizen wie beim Bartholomew-Funktional. Dies ist auch in Abbildung 9-8 festgehalten.

$$P_{\text{ident}} \prec_p P_4 \prec_p P_1 \prec_p P_5 \prec_p P_2 \prec_p P_3 \prec_p P_{\text{mobil}} \cdot$$





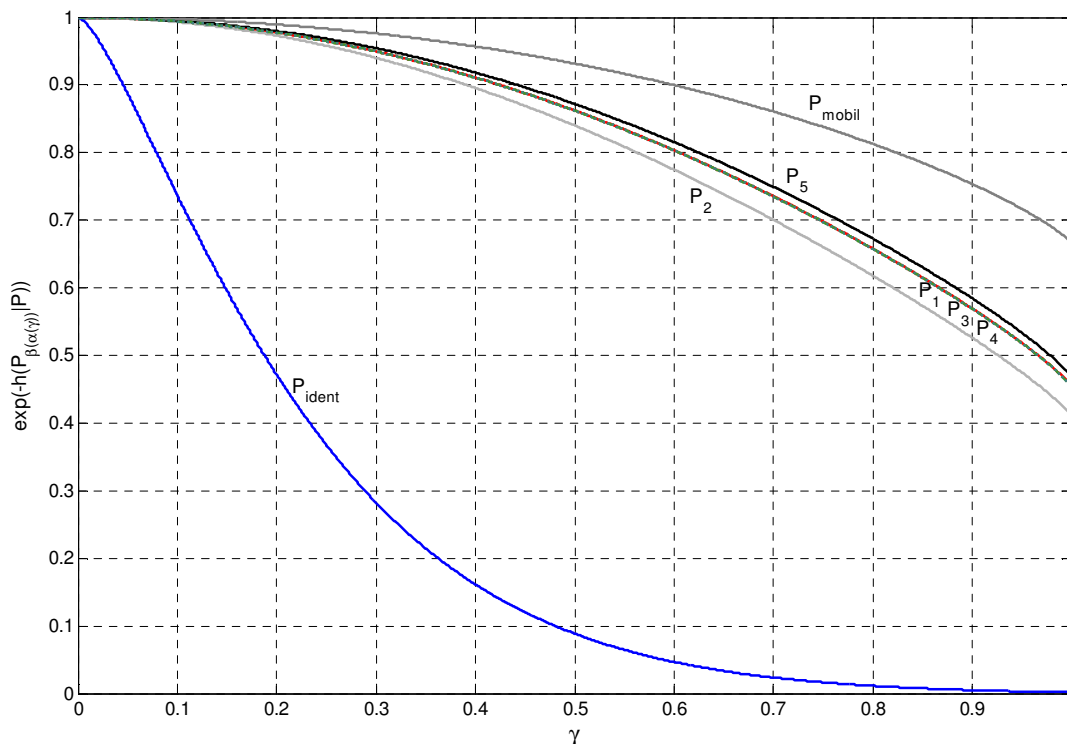
**Abbildung 9-8:** Periodenmobilität basierend auf dem Funktional der quadrierten Distanz

Eine Gegenüberstellung von Abbildung 9-8 und Abbildung 9-6 zeigt, dass die Verlaufskurven aller Dynamiken beim Funktional der quadrierten Distanz im Vergleich zum Bartholomew-Funktional leicht nach links verschoben werden. Dies deshalb, weil das Funktional der quadrierten Distanz den direkten Wechsel von Klasse 1 nach 3 und umgekehrt im Vergleich zu allen Wechsels um nur eine Klasse mit noch mehr Gewicht bewertet, als das Bartholomew-Funktional. Deshalb rücken auch die Verläufe der Periodenmobilitäten der Dynamiken  $P_1$  und  $P_5$ , welche ja beide für  $\gamma = 1$  denselben Wert aufweisen, noch näher zusammen. Ob es allerdings sinnvoll ist, zwei so ähnlich verlaufende Periodenmobilitäten unterschiedlich zu rangieren, ist zumindest fraglich. Um diese quasi-Gleichheit auszudrücken wurden diese beiden Dynamiken mit dem Symbol  $\preceq_p$  rangiert.

### 9.2.6.3 Funktional des Verlassens der gegenwärtigen Klasse

Im Falle des Klassenwechsel-Funktional stimmen, gleich wie beim Funktional der quadrierten Distanz, die Gleichgewichtsindices der Dynamiken  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  und  $P_5$  überein, während derjenige von  $P_2$  tiefer ausfällt. Die nicht positive Matrix  $P_3$  besitzt hier jedoch dasselbe  $\alpha_{\max}(P)$  wie alle anderen Übergangsdynamiken. Aus diesem Grund entspricht hier die relative der absoluten Optik bei allen Matrizen mit identischem Gleichgewichtsindex. Das Klassenwechsel-Funktional führt, da im Unterschied zu den vorangegangenen Funktionalen jede Bewegung mit dem gleichen Gewicht versehen wird, zu einer anderen Rangierung der Testdynamiken. Dies wird in Abbildung 9-9 auch grafisch dargestellt.

$$P_{\text{ident}} \prec_p P_2 \prec_p P_3 \prec_p P_4 \prec_p P_1 \prec_p P_5 \prec_p P_{\text{mobil}} .$$



**Abbildung 9-9:** Periodenmobilität basierend auf dem Klassenwechsel-Funktional

Auch hier bleibt die Rangfolge über den gesamten Definitionsbereich des Parameters  $\gamma$  erhalten. Es erstaunt in diesem Szenario wenig, dass die Verläufe der Periodenmobilität der nicht positiven Dynamik  $P_3$  und ihrem positiven Pendant  $P_4$  beinahe deckungsgleich sind. Interessant ist auch die Feststellung, dass die Matrix  $P_1$  eben-

falls einen nahezu identischen Verlauf aufweist. Ein Vergleich dieser drei Dynamiken zeigt, dass alle über eine identische Diagonale verfügen. Auch hier lässt sich bezweifeln, ob diese drei Matrizen hinsichtlich ihrer Periodenmobilität unterschiedlich rangiert werden sollen.

Im Gegensatz zu Funktionalen, welche grösseren Bewegungen mehr Gewicht zuzordnen, lässt sich beim Klassenwechsel-Funktional die jeweilige Perron-Frobenius-Transformierte  $P_\infty$  nicht mehr, wie in Abschnitt 9.2.5 dargestellt, auf einfache Weise herleiten. Somit ist auch die Bestimmung der Periodenmobilität bei  $\gamma = 1$  nicht mehr auf triviale Weise möglich. Die Dynamiken  $P_1$  und  $P_5$  enden hier nicht mehr im selben Punkt. Der Verlauf ihrer Periodenmobilitäten ist somit hier unterschiedlicher als bei den beiden vorhergehenden Funktionalen. Interessant ist die Beobachtung, dass sich  $P_5$  von  $P_1$ ,  $P_3$  und  $P_4$  stärker unterscheidet, obschon  $P_5$  dasselbe Gewicht auf der Hauptdiagonale hat wie die anderen drei Dynamiken. Die Diagonale unterscheidet sich jedoch in ihren Elementen von den Diagonalen von  $P_1$ ,  $P_3$  und  $P_4$ .

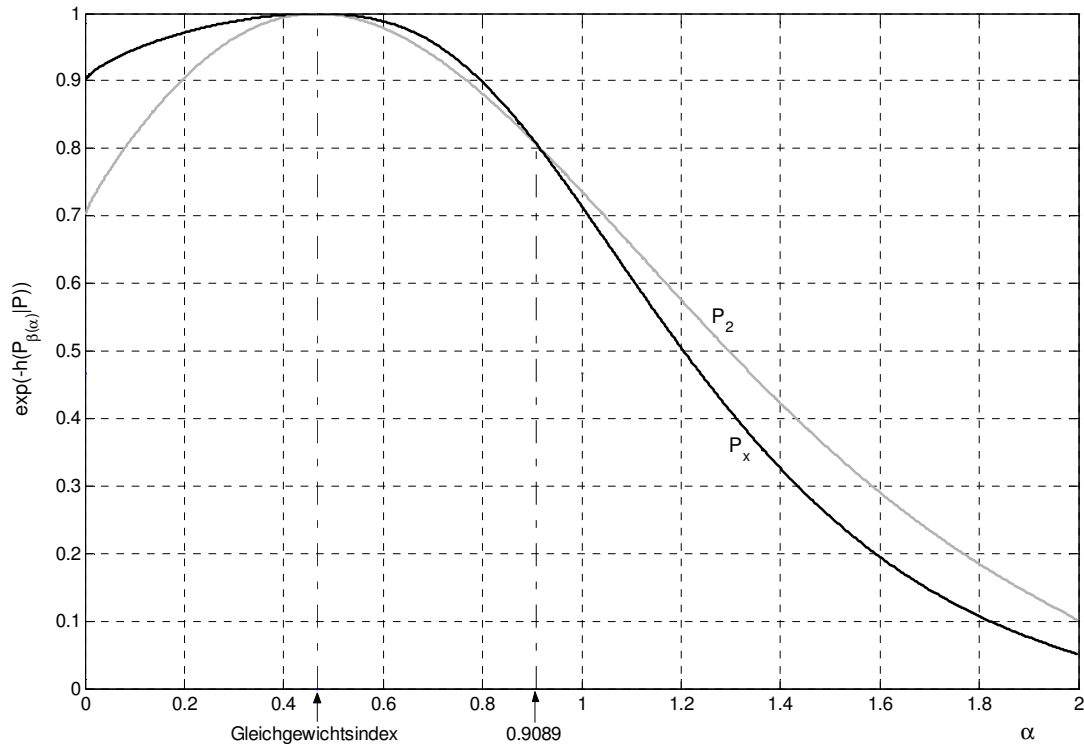
#### 9.2.6.4 Schnittpunkt von Periodenmobilitätskurven, gesamter Wertebereich von $\alpha$

Mit der Bedeutung der Periodenmobilität für Abweichungen der empirischen Mobilität unterhalb eines Schwellenwerts  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  ist der letzte Baustein erarbeitet worden, dessen es für eine vollständige Diskussion des Mobilitätsphänomens unter dem hier gewählten Ansatz bedarf (vergleiche Abschnitt 9.2.2.1). Die Diskussion wird wiederum anhand des Bartholomew-Mobilitätsfunktional  $f_{ij} = |i - j|$  geführt. Als Beispieldynamiken wurden die Dardanoni-Matrix  $P_2$  sowie die Übergangsmatrix  $P_x$  gewählt (vergleiche Abschnitt 3.5.2):

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \quad P_x = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.55 & 0.05 \\ 0.55 & 0.4 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Beide Dynamiken teilen denselben Gleichgewichtsindex, dieselbe Gleichgewichtsverteilung sowie dieselbe maximale Mobilität  $\alpha_{\max}$ . Der Vergleich ihrer Periodenmobilitäten kann somit über den gesamten Definitionsbereich des Schwellenwerts

( $\alpha \in (0, \alpha_{\max}(P))$ ) angestellt werden. In Abbildung 9-10 sind die Periodenmobilitäten als Funktion des Schwellenwerts  $\alpha$  dargestellt.



**Abbildung 9-10:** Periodenmobilitätskurven über den gesamten Wertebereich von  $\alpha$

Die Diskussion wird in zwei Teile aufgeteilt, wobei die Unterteilungsgrenze durch den Gleichgewichtsindex gegeben ist.

#### A) Grosse Abweichungen unterhalb eines Schwellenwerts $\alpha \in (0, M_F^e(P))$

Werden grosse Abweichungen der empirischen Mobilität unterhalb eines Schwellenwerts  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$  betrachtet, dann ist die Wahrscheinlichkeit, in der nächsten Periode immer noch eine empirische Mobilität unterhalb  $\alpha$  aufzuweisen, für die Dynamik  $P_x$  deutlich höher als für  $P_2$ . Dies gilt für alle  $\alpha \in (0, M_F^e(P))$ . Dies bedeutet, dass die Übergangsmatrix  $P_2$  hier schneller gegen den Gleichgewichtsindex konvergiert. Bei einer genaueren Betrachtung der beiden Dynamiken kann dies nicht weiter erstauen. In diesem Bereich des Schwellenwerts ist die Wahrscheinlichkeit für fortgesetzte Abweichungen der empirischen Mobilität unterhalb  $\alpha$  umso höher, je weniger Bewegungspotential eine Einkommensdynamik aufweist. Der Grund für die höhere Perio-

denmobilität der Dynamik  $P_x$  muss somit mit der hohen Persistenz in der obersten Einkommensklasse zusammenhängen. Die starke Immobilität der obersten Einkommensklasse unter Dynamik  $P_x$  sorgt dafür, dass die Wahrscheinlichkeit fortgesetzter grosser Abweichungen hoch bleibt.

### B) Grosse Abweichungen oberhalb des Schwellenwerts $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$

Aus Abbildung 9-10 ist ersichtlich, dass sich die beiden Periodenmobilitätskurven bei  $\alpha = 0.9089$  schneiden. Der untersuchte Bereich von  $\alpha$  muss somit in zwei Abschnitte unterteilt werden.

- Für  $\alpha < 0.9089$  ist die Wahrscheinlichkeit für fortgesetzte grosse Abweichungen in der nächsten Periode für die Übergangsdynamik  $P_x$  grösser als für  $P_2$ . In diesem Bereich dominieren die insgesamt höheren Wahrscheinlichkeiten für einen Sprung in eine benachbarte Klasse in  $P_x$  die Szene, insbesondere die Elemente (1,2) und (2,1), welche jeweils eine Wahrscheinlichkeit von 55 % beinhalten. In diesem Bereich von  $\alpha$  trägt ja eine Veränderung in eine Nachbarklasse mit dem Gewicht 1 des Bartholomew-Funktionalis zu einer Erhöhung der empirischen Mobilität bei.
- Für  $\alpha > 0.9089$  ändert sich das Bild zugunsten einer höheren Wahrscheinlichkeit für fortgesetzte grosse Abweichungen von  $P_2$ . Für alle  $\alpha > 1$  trägt das blosse Überspringen einer einzigen Klassengrenze nicht mehr zur Erhöhung der empirischen Mobilität bei. Um die empirische Mobilität in diesen Fällen zu erhöhen sind Bewegungen über zwei Klassen notwendig, also Sprünge von Klasse 1 nach 3 oder umgekehrt. Für solche Bewegungen sind die Wahrscheinlichkeiten in Dynamik  $P_2$  höher als in  $P_x$ .

Zusammengefasst kann gesagt werden, dass, je grösser  $\alpha$  gewählt wird, desto stärker die Wahrscheinlichkeiten für Klassenwechsel über mehrere Klassen ins Gewicht fallen. Da Klassenwechsel über zwei Klassen bei  $P_2$  insgesamt wahrscheinlicher sind,  $P_2$  insgesamt jedoch mehr Gewicht auf der Hauptdiagonalen hat als  $P_x$  und somit auch eine gesamthaft geringere Wahrscheinlichkeit für Wechsel in eine benachbarte Klasse aufweist, kommt es zum beobachteten Schnittpunkt der beiden Periodenmobilitätskurven bei  $\alpha = 0.9089$ .

### 9.3 ERGÄNZUNGEN ZUM EMPIRISCHEN TEIL

#### 9.3.1 Die Variablen des PSID-Datensatzes

---

NOTE: Codebook generated on 18FEB1998 at 13:24:13.

The PSID: 1968-1993 Individual Data

---

V30000	RELEASE NUMBER	Reference: 1
--------	----------------	--------------

Type: Num Width: 1 Decimals: 0 Location: 1

Release Number

53013 1 Release number 1

---

V30001	1968 INTERVIEW NUMBER	Reference: 2
--------	-----------------------	--------------

Type: Num Width: 4 Decimals: 0 Location: 2-5

1968 Interview Number (1968 ID Number)

This variable is the 1968 family ID number. The combination of this variable and Person Number (V30002) provides unique identification for each individual on the data file. Individuals associated with families from the Latino sample, added to the PSID in 1990 and 1992, were assigned 1968 IDs so that they, too, have unique identifiers compatible with the PSID structure for the core (SRC and Census) sample.

20809	1-2930	Member of, or moved into, a family from the 1968 SRC cross-section sample
22182	5001-6872	Member of, or moved into, a family from the 1968 Census sample
10022	7001-9308	Member of, or moved into, a family from the Latino sample added in 1990 and 1992

---

V30002	PERSON NUMBER	Reference: 3
--------	---------------	--------------

Type: Num Width: 3 Decimals: 0 Location: 6-8

1968 Person Number

25960	1-19	Individuals living in core sample families at the time of the 1968 interview; individuals living in Latino sample families at the time of the 1990 interview
	19 20	Husband of a core sample 1968 Head living in an institution at the time of the 1968 interview; spouse of a Latino sample 1990 Head living in an institution at the time of the 1990 interview
	436 21-26	Children or stepchildren of a 1968 core sample Head who were under 25 and living in institutions at the time of the 1968 interview; children of a Latino sample 1990 Head under 25 and living in institutions at the time of the 1990 interview
	10584 30-169	Individuals born into the core sample since the 1968 interview and who have at least one sample parent; these persons are sample members
	15945 170-226	Individuals who moved into a core family for the first time after the 1968 interview or who have no sample parent; individuals from the Latino sample, other than the spouse of a 1990 Head, who moved out in the year preceding the 1990 interview. These individuals are nonsample.
	41 227	Spouse of a core sample 1968 Head who moved out in the year prior to the 1968 interview; spouse of a Latino sample 1990 Head who moved out in the year preceding the 1990 interview. These individuals are nonsample.
	28 228	Spouse of a core sample 1968 Head who died in the year prior to the 1968 interview; spouse of a Latino sample 1990 Head in the year prior to the 1990 interview. These individuals are nonsample.

---

V30313 1980 INTERVIEW NUMBER Reference: 314

Type: Num Width: 4 Decimals: 0 Location: 718-721

1980 Interview Number (1980 ID Number)

The values for this variable represent the 1980 ID number of the interview in which this individual was included in 1980. Individuals moving in or born subsequent to the 1980 interview received the 1980 ID number of the family to which they moved.

32677 1-6533 1980 family interview number  
 20336 0 Main family nonresponse by 1980 or  
 mover-out nonresponse by 1979; from  
 Latino sample (V30001=7001-9308)

Valid N: 53013 Minimum: 0.00 Maximum: 6533.00  
 Mean: 2063.83 Std Dev: 2183.78

---

V30314 SEQUENCE NUMBER 80 Reference: 315

Type: Num Width: 2 Decimals: 0 Location: 722-723

1980 Sequence Number

This variable provides a means of identifying an individual's status with regard to the FU at the time of the 1980 interview.

18920 1-20 Individuals in the family at the time of the 1980 interview  
 305 51-59 Individuals in institutions at the time of the 1980 interview  
 453 71-80 Individuals who moved out of the FU or out of institutions between the 1979  
 and 1980 interviews but who were not included in another responding FU for  
 1980. All such individuals were nonresponse.  
 69 81-89 Individuals who were living in 1979 but who died by the time of the 1980  
 interview  
 33266 0 Born or moved in after the 1980 interview; from Latino sample (V30001=7001-  
 9308); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979  
 (V30313=0000)

---

V30315 RELATIONSHIP TO HEAD 80 Reference: 316

Type: Num Width: 2 Decimals: 0 Location: 724-725

1980 Relationship to Head

6642 1 Head in 1980; 1979 Head who was mover-out nonresponse by the time of the 1980  
 interview  
 3915 2 Wife in 1980; 1979 Wife who was mover-out nonresponse by the time of the 1980  
 interview  
 8012 3 Son or daughter; includes stepchildren and adopted children  
 120 4 Brother or sister of Head  
 83 5 Mother or father of Head  
 491 6 Grandchild or great-grandchild  
 270 7 Other relative; includes in-laws  
 200 8 Nonrelative  
 14 9 Husband of Head (i.e., wife was Head of FU)  
 33266 0 From Latino sample (V30001=7001-9308); born or moved in after the 1980 interview  
 (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonre-  
 sponse by 1979 (V30313=0000)

---

V30316	AGE OF INDIVIDUAL	80	Reference: 317
--------	-------------------	----	----------------

Type: Num Width: 2 Decimals: 0 Location: 726-727

Age at the Time of the 1980 Interview

The values for this variable represent the actual age of the individual in years.

863	1	Newborn up to second birthday
18880	2-97	Actual age
2	98	98 years old or older
2	99	NA; DK
33266	0	From Latino sample (V30001=7001-9308); born or moved in after the 1980 interview (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979 (V30313=0000)

Missing Data: 99

Valid N: 53011	Minimum: 0.00	Maximum: 98.00
Mean: 10.29	Std Dev: 18.02	

---

V30318	WTR MOVED IN/OUT OF FAMILY UNIT	80	Reference: 319
--------	---------------------------------	----	----------------

Type: Num Width: 1 Decimals: 0 Location: 729

1980 Moved In/Moved Out Indicator

1659	1	Moved in or born between the 1979 and 1980 interviews; splitoff in 1980
92	2	Appeared; did not move in between the 1979 and 1980 interviews, but not included in FU for 1979 (i.e., listing error)
436	5	Moved out of FU or out of an institution between the 1979 and 1980 interviews and was not included in a 1980 panel FU.
103	6	Moved out of FU and into an institution between the 1979 and 1980 interviews
69	7	Living in 1979 but died by the time of the 1980 interview
17	8	Disappeared; moved out prior to the 1979 interview, but included in FU for 1979 (usually a listing error)
50637	0	Inap.: in main family in both 1979 and 1980; from Latino sample (V30001=7001-9308); in an institution in both 1979 and 1980 (V30284=51-59 and V30314=51-59); interview (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979 (V30313=0000)

Missing Data: 0

---

V30327	TYPE 1979 TAXABLE INCOME	80	Reference: 328
--------	--------------------------	----	----------------

Type: Num Width: 1 Decimals: 0 Location: 745

TYPE OF TAXABLE INCOME RECEIVED DURING 1979:

K40. During 1979 did (he/she) have a full-time or part-time job (not counting work around the house)?

K46. What was that from?

7728	1	Labor income only
482	2	Asset income only
2139	3	Both labor and asset income
42664	0	Inap.: no taxable income; from Latino sample (V30001=7001-9308); born or moved in after the 1980 interview (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979 (V30313=0000); in an institution in both 1979 and 1980 (V30314=51-59 and V30318=0)

Missing Data: 0



---

V30328 1979 TOTAL TAXABLE INCOME 80 Reference: 329

Type: Num Width: 5 Decimals: 0 Location: 746-750

TOTAL 1979 TAXABLE MONEY INCOME OF THIS INDIVIDUAL:

K42. About how much money did (he/she) earn from work last year?

K47. How much was that last year?

The values for this variable indicate the amount of total taxable income received in whole dollars. All missing data were assigned. For Heads or Wives, the values here are labor income of each plus one-half of their combined asset income.

0	-9999	Loss of \$9,999 or more
0	-9998-1	Actual amount of loss
10348	1-99998	Actual amount of taxable income
13	99999	Taxable income of \$99,999 or more
42652	0	Inap.: from Latino sample (V30001=7001-9308); born or moved in after the 1980 interview (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979 (V30313=0000); in an institution in both 1979 and 1980 (V30314=51-59 and V30318=0); no taxable income (V30327=0)

Missing Data: 0

Valid N: 10361	Minimum: 2.00	Maximum: 99999.00
Mean: 10392.52	Std Dev: 10659.97	

---

V30330 HOURS WORKED IN 1979 80 Reference: 331

Type: Num Width: 4 Decimals: 0 Location: 752-755

WORK HOURS IN 1979:

K43. About how many weeks did (he/she) work last year?

K44. During the weeks that (he/she) worked about how many hours did (he/she) usually work per week?

The values for this variable indicate the actual hours worked in 1979. All missing data were assigned.

9899	1-9600	Actual hours
43114	0	Inap.: from Latino sample (V30001=7001-9308); born or moved in after the 1980 interview (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979 (V30313=0000); in an institution in both 1979 and 1980 (V30314=51-59 and V30318=0); did not work (V30327=0 or 2)

Missing Data: 0

Valid N: 9899	Minimum: 1.00	Maximum: 9600.00
Mean: 1582.47	Std Dev: 873.68	

---

V30334 TYPE 1979 TRANSFER INCOME 80 Reference: 335

Type: Num Width: 2 Decimals: 0 Location: 762-763

TYPE OF TRANSFER INCOME RECEIVED DURING 1979:

K45. Did (he/she) have any (other) income last year?

K46. What was that from?

250	1	ADC, AFDC only
126	2	Supplemental Security Income (SSI) only
139	3	Other welfare only
865	4	Social Security only
229	5	Other retirement pay, pensions, or annuities only
463	6	Unemployment compensation only
96	7	Worker compensation only
150	8	Child support only
211	9	Help from relatives only
261	10	Other transfers only
1140	15	More than one of the above; any combination
49083	0	Inap.: no transfer income; from Latino sample (V30001=7001-9308); born or moved in after the 1980 interview (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979 (V30313=0000); in an institution in both 1979 and 1980 (V30314=51-59 and V30318=0)

Missing Data: 0

---

V30335 TOTAL 1979 TRANSFER INCOME 80 Reference: 336

Type: Num Width: 5 Decimals: 0 Location: 764-768

TOTAL 1979 TRANSFER MONEY INCOME OF THIS INDIVIDUAL:

K45. Did (he/she) have any (other) income last year?

K46. What was that from?

K47. How much was that last year?

The values for this variable indicate the amount of total transfer income received in whole dollars. All missing data were assigned.

3946	1-99998	Actual amount received
0	99999	\$99,999 or more
49067	0	Inap.: from Latino sample (V30001=7001-9308); born or moved in after the 1980 interview (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979 (V30313=0000); in an institution in both 1979 and 1980 (V30314=51-59 and V30318=0); no transfer income (V30334=00)

Missing Data: 0

Valid N: 3946	Minimum: 5.00	Maximum: 40000.00
Mean: 3005.57	Std Dev: 2926.19	

---

V30342	INDIVIDUAL WEIGHT	80	Reference: 343
--------	-------------------	----	----------------

Type: Num Width: 4 Decimals: 1 Location: 784-787

1979 Individual Weight, Updated for 1980

This variable is nonzero only for sample members associated with a 1980 panel family. Sample members born into the family in 1980 receive either the average of the Head's and spouse's weights or, in the event of a single Head, the child receives the Head's weight. Those sample members returning to a panel family after becoming nonresponse receive the same weight that they had in the last year that they had nonzero data. Refer to Section I, Part 5 for details on the weights themselves.

15919	0.3-93.9	Updated core sample individual weight
37094	0.0	From Latino sample (V30001=7001-9308); born or moved in after the 1980 interview (V30313>0000 and V30314=00); main family nonresponse by 1980 or mover-out nonresponse by 1979 (V30313=0000); nonsample individual (V30002=170-228)

Valid N: 53013	Minimum: 0.00	Maximum: 93.90
Mean: 5.39	Std Dev: 11.30	

---

V30642	1990 INTERVIEW NUMBER		Reference: 643
--------	-----------------------	--	----------------

Type: Num Width: 5 Decimals: 0 Location: 1521-1525

1990 Interview Number (1990 ID Number)

The values for this variable represent the 1990 ID number of the interview in which this individual was included in 1990.

23603	1-10000	1990 core family interview number
8902	10001-12043	1990 Latino family interview number
20508	0	This individual was main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989; from Latino recontact sample (V30001=9044-9308)

Valid N: 53013	Minimum: 0.00	Maximum: 12043.00
Mean: 3512.08	Std Dev: 4045.95	

---

V30643	1990 SEQUENCE NUMBER	90	Reference: 644
--------	----------------------	----	----------------

Type: Num Width: 2 Decimals: 0 Location: 1526-1527

1990 Sequence Number

This variable provides a means of identifying an individual's status with regard to the FU at the time of the 1990 interview.

26930	1-20	Individuals in the family at the time of the 1990 interview
308	51-59	Individuals in institutions at the time of the 1990 interview
878	71-80	Individuals who moved out of the FU or out of institutions and established their own households between the 1989 and 1990 interviews
81	81-89	Individuals who were living in 1989 but died by the time of the 1990 interview
24816	0	Born or moved in after the 1990 interview; from Latino recontact sample (V30001=9044-9308); main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989 (V30642=00000)

V30644	RELATIONSHIP TO HEAD	90	Reference: 645
--------	----------------------	----	----------------

Type: Num Width: 2 Decimals: 0 Location: 1528-1529

### 1990 Relationship to Head

Note that these relationships are those to the 1989 Head for any individual whose 1990 sequence number (V30643) is greater than 50, that is, has moved out of the FU. Thus, for example, if the 1989 Head is no longer present at the time of the 1990 interview, his or her relationship to Head is coded 10; the new 1990 Head also is coded 10. Therefore, to select current Heads, the user must select those coded 10 in this variable whose sequence numbers (V30643)=01.

9522	10	Head in 1990; 1989 Head who was mover-out nonresponse by the time of the 1990 interview
5092	20	Legal wife in 1990; 1989 wife who was mover-out nonresponse by the time of the 1990 interview
388	22	"Wife"--female cohabitor who has lived with Head for a year or more or who was present in the 1989 family, since consecutive interviews may be taken less or more than twelve months apart; 1989 "wife" who was mover-out nonresponse by the time of the 1990 interview
9990	30	Son or daughter of Head (includes adopted children but not stepchildren)
813	33	Stepson or stepdaughter of Head (children of legal wife (code 20) who are not children of Head)
230	35	Son or daughter of "wife" but not Head (includes only those children of mothers whose relationship to Head is 22 but who are not children of Head)
62	37	Son-in-law or daughter-in-law of Head (includes stepchildren-in-law)
42	38	Foster son or foster daughter, not legally adopted
259	40	Brother or sister of Head (includes step and half sisters and brothers)
81	47	Brother-in-law or sister-in-law of Head; i.e., brother or sister of legal wife.
8	48	Brother or sister of Head's cohabitor (the cohabitor is coded 22 or 88)
180	50	Father or mother of Head (includes stepparents)
114	57	Father-in-law or mother-in-law of Head (includes parents of legal wives (code 20) only)
3	58	Father or mother of Head's cohabitor (the cohabitor is coded 22 or 88)
691	60	Grandson or granddaughter of Head (includes grandchildren of legal wife (code 20) only; those of a cohabitor are coded 97)
30	65	Great-grandson or great-granddaughter of Head (includes only great-grandchildren of legal wife (code 20); those of a cohabitor are coded 97)
17	66	Grandfather or grandmother of Head (includes stepgrandparents)
3	67	Grandfather or grandmother of legal wife (code 20)
0	68	Great-grandfather or great-grandmother of Head
0	69	Great-grandfather or great-grandmother of legal wife (code 20)
149	70	Nephew or niece of Head
24	71	Nephew or niece of legal wife (code 20)
27	72	Uncle or Aunt of Head
6	73	Uncle or Aunt of legal wife (code 20)
42	74	Cousin of Head
4	75	Cousin of legal wife (code 20)
61	83	Children of first-year cohabitor but not of Head (the parent of this child is coded 88)
209	88	First-year cohabitor of Head
11	90	Legal husband of Head
32	95	Other relative of Head
2	96	Other relative of legal wife (code 20)
15	97	Other relative of cohabitor (the cohabitor is code is 22 or 88)
90	98	Other nonrelatives (includes homosexual friends, friends of children of the FU, etc.)
24816	0	From Latino recontact sample (V30001=9044-9308); main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989 (V30642=00000); born or moved in after the 1990 interview (V30642>00000 and V30643=00)

---

V30645                                    AGE OF INDIVIDUAL                                    90                    Reference: 646

Type: Num    Width: 2    Decimals: 0    Location: 1530-1531

Age at the Time of the 1990 Interview

The values for this variable represent the actual age of the individual reported in years on his or her most recent birthday. See V30680 for an age variable that is generated from birth date information. Consistency of V30645 with V30646-V30647 was not forced unless it was clear that the interviewer made an error in recording the individual's age or birth date.

1080	1	Newborn up to second birthday
27104	2-97	Actual age
5	98	98 years old or older
10	99	NA; DK
24814	0	From Latino recontact sample (V30001=9044-9308); main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989 (V30642=00000); born or moved in after the 1990 interview (V30642>00000 and V30643=00)

Missing Data: 99

Valid N: 53003	Minimum: 0.00	Maximum: 98.00
Mean: 15.73	Std Dev: 21.14	

---

V30649                                    WTR MOVED IN/OUT OF FAMILY UNIT                                    90                    Reference: 650

Type: Num    Width: 1    Decimals: 0    Location: 1539

1990 Moved In/Moved Out Indicator

2118	1	Moved in or born between the 1989 and 1990 interviews; splitoff in 1990
85	2	Appeared; did not move in between the 1989 and 1990 interviews, but not included in FU for 1989 (i.e., listing error)
848	5	Moved out of FU or out of an institution between the 1989 and 1990 interviews and was not included in a 1990 panel FU
85	6	Moved out of FU and into an institution between the 1989 and 1990 interviews
81	7	Living in 1989 but died by the time of the 1990 interview
37	8	Disappeared; moved out prior to the 1989 interview, but included in FU for 1989 (usually a listing error)
49759	0	Inap.: in main family in both 1989 and 1990 (includes Latino non-movers); Latino in institution in both 1989 and 1990; from Latino recontact sample (V30001=9044-9308); core in an institution in both 1989 and 1990 (V30607=51-59 and V30643=51-59); main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989 (V30642=00000); born or moved in after the 1990 interview (V30642>00000 and V30643=00)

Missing Data: 0

---

V30658                                    TYPE TXBL INCOME                                    90                    Reference: 659

Type: Num    Width: 1    Decimals: 0    Location: 1557

TYPE OF TAXABLE INCOME RECEIVED DURING 1989:

G76. During 1989 did (he/she) have a full-time or part-time job (not counting work around the house)?

G84. What was that from?

10397	1	Labor income
1043	2	Asset income
3228	3	Both labor and asset income
38345	0	Inap.: no taxable income; from Latino recontact sample (V30001=9044-9308); main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989 (V30642=00000); born or moved in after the 1990 interview (V30642>00000 and V30643=00); in an institution in both 1989 and 1990 (V30643=51-59 and V30649=0)

Missing Data: 0



---

V30663	TYPE TRANSFER Y-IND	90	Reference: 664
--------	---------------------	----	----------------

---

Type: Num Width: 2 Decimals: 0 Location: 1570-1571

TYPE OF TRANSFER INCOME RECEIVED DURING 1989:

G83. Did (he/she) have any (other) income, such as pensions, welfare, interest, gifts, or anything else, last year?

G84. What was that from?

318	1	ADC, AFDC only	
249	2	Supplemental Security Income, SSI only	
187	3	Other Welfare only	
1541	4	Social Security only	
86	5	Veterans pension	
248	6	Other retirement pay, pensions, or annuities only	
485	7	Unemployment compensation only	
152	8	Worker Compensation only	
299	9	Child support only	
276	10	Help from relatives only	
407	11	Other transfers only	
1615	15	More than one of the above; any combination	
47150	0	Inap.: no transfer income; from Latino recontact sample (V30001=9044-9308); main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989 (V30642=00000); born or moved in after the 1990 interview (V30642>00000 and V30643=00); in an institution in both 1989 and 1990 (V30643=51-59 and V30649=0)	

Missing Data: 0

---

V30669	TOTAL TRNSFR Y-IND	90	Reference: 670
--------	--------------------	----	----------------

---

Type: Num Width: 5 Decimals: 0 Location: 1585-1589

TOTAL 1989 TRANSFER MONEY INCOME OF THIS INDIVIDUAL

The values for this variable indicate the total amount of transfer income received in whole dollars. This amount was calculated by summing V30665 and V30667.

5860	1-99998	Actual amount received	
3	99999	\$99,999 or more	
47150	0	Inap.: from Latino recontact sample (V30001=9044-9308); main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989 (V30642=00000); born or moved in after the 1990 interview (V30642>00000 and V30643=00); in an institution in both 1989 and 1990 (V30643=51-59 and V30649=0); no transfer income (V30663=00)	

Missing Data: 0

Valid N: 5863	Minimum: 10.00	Maximum: 99999.00
Mean: 5375.75	Std Dev: 5911.35	

---

V30686	CORE IND WEIGHT	90	Reference: 687
--------	-----------------	----	----------------

Type: Num Width: 7 Decimals: 3 Location: 1620-1626

1989 Core Weight, Updated for 1990

This weight variable is to be used only for analysis of the core sample. If you wish to analyze both the core and Latino samples, then see V30688. If you wish to analyze only the Latino sample, then see V30687.

This variable is nonzero only for sample members associated with a 1990 core sample family. Sample members born into the family in 1990 receive either the average of the Head's and spouse's weights or, in the event of a single Head, the child receives the Head's weight. For those sample members either not yet part of the family in 1984 but present by 1989 or who were main family nonresponse in 1984 and moved back into the panel in 1989, the most recent weight is brought forward to these positions. Refer to Section I, Part 5 of this volume for details on the weights.

15623	0.001-131.877	Updated 1989 core sample individual weight
37390	0.000	Latino sample individual (V30001=7001-9308); main family nonresponse by 1990 or mover-out nonresponse by 1989 (V30642=00000); individual was not a sample member (V30002=170-228)

Valid N: 53013	Minimum: 0.00	Maximum: 131.88
Mean: 6.18	Std Dev: 13.12	

---

V32000	SEX OF INDIVIDUAL		Reference: 881
--------	-------------------	--	----------------

Type: Num Width: 1 Decimals: 0 Location: 2060

Sex of Individual

26095	1	Male
26918	2	Female
	0	9 NA

Missing Data: 9

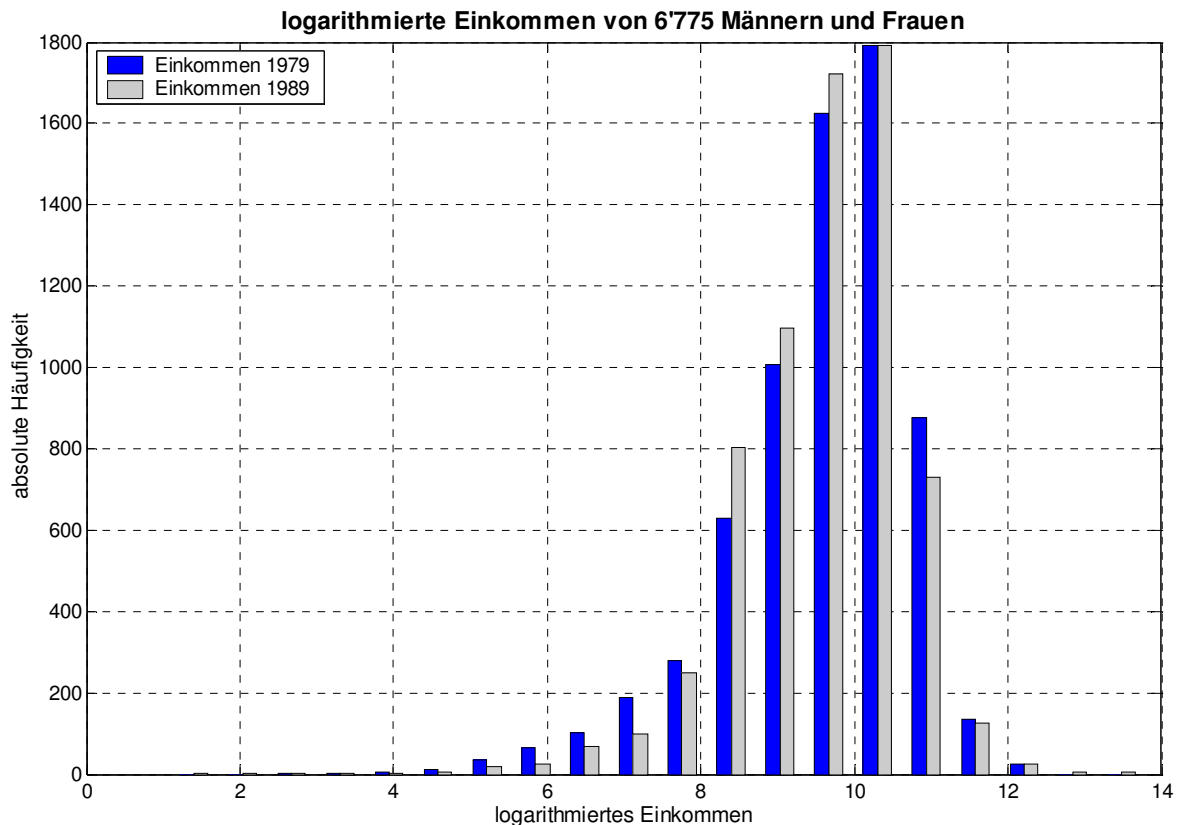
---

### 9.3.2 Anpassen der Einkommensgrenzen an die Daten und das AR(1)-Modell

Die Festlegung der für den gesamten empirischen Teil gültigen Einkommensgrenzen wird durch zwei Bedingungen beeinflusst. Zum einen wird beim AR(1)-Modell aus Abschnitt 6.2.3 von logarithmierten Einkommen ausgegangen. Diesem Vorgehen liegt die empirisch gut gestützte Annahme einer Lognormalverteilung der Einkommen zugrunde. Dies wird in Abbildung 9-11 durch die Histogramme der logarithmierten PSID-Daten aus Kapitel 5 untermauert. Beim Diskretisieren der Einkommensverteilung in  $K = 10$  Einkommensklassen sollten die daraus resultierenden Einkommenshistogramme die postulierte Normalverteilung der logarithmierten Einkommen näherungsweise widerspiegeln. Somit werden die für die AR(1)-Hypothese benötigten Gitterpunkte, welche dann zugleich die Einkommensgrenzen festlegen, am besten äquidistant gewählt. Zweitens müssen die Einkommensgrenzen gut an alle verwen-



deten Daten angepasst sein. Dies erfordert das Studium der logarithmierten Daten anhand sogenannter Streudiagramme (PSID-Daten) respektive die Betrachtung der Einkommensverteilungen der Burkhauser-Daten (Abbildung 5-1). Die äquidistanten Gitterpunkte des AR(1)-Modells müssen somit so gewählt werden, dass sie allen Datensätzen des empirischen Teils dieser Arbeit gerecht werden.

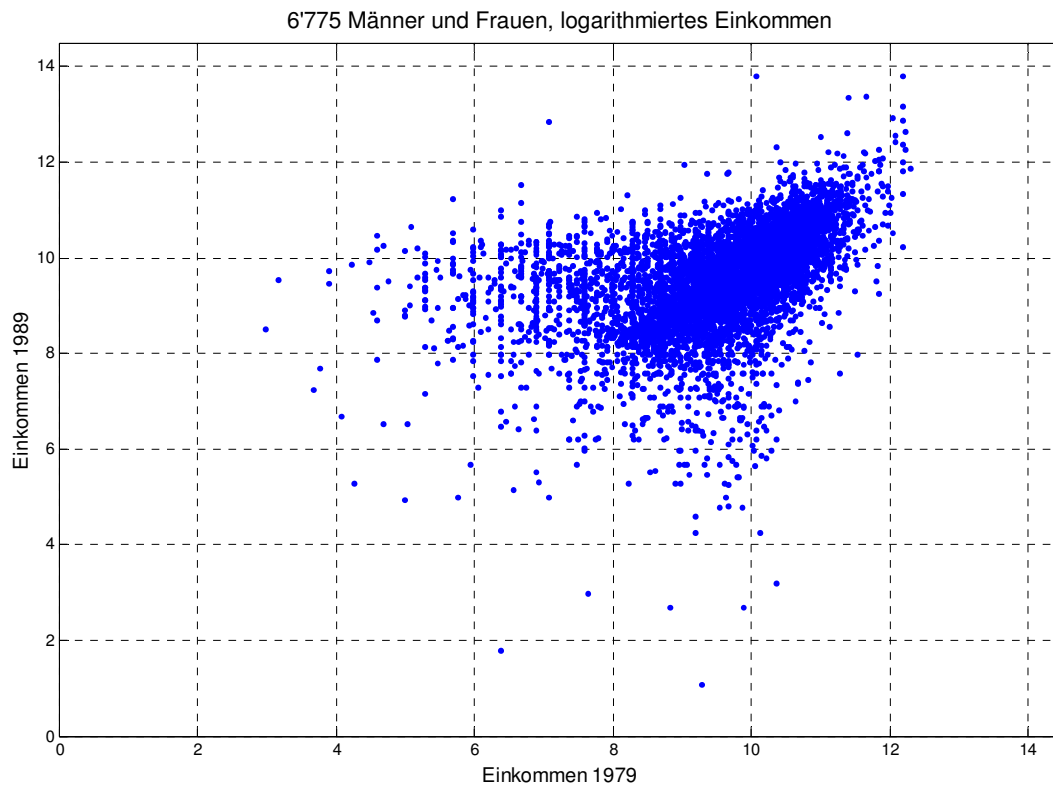


**Abbildung 9-11:** Histogramme der PSID-Daten

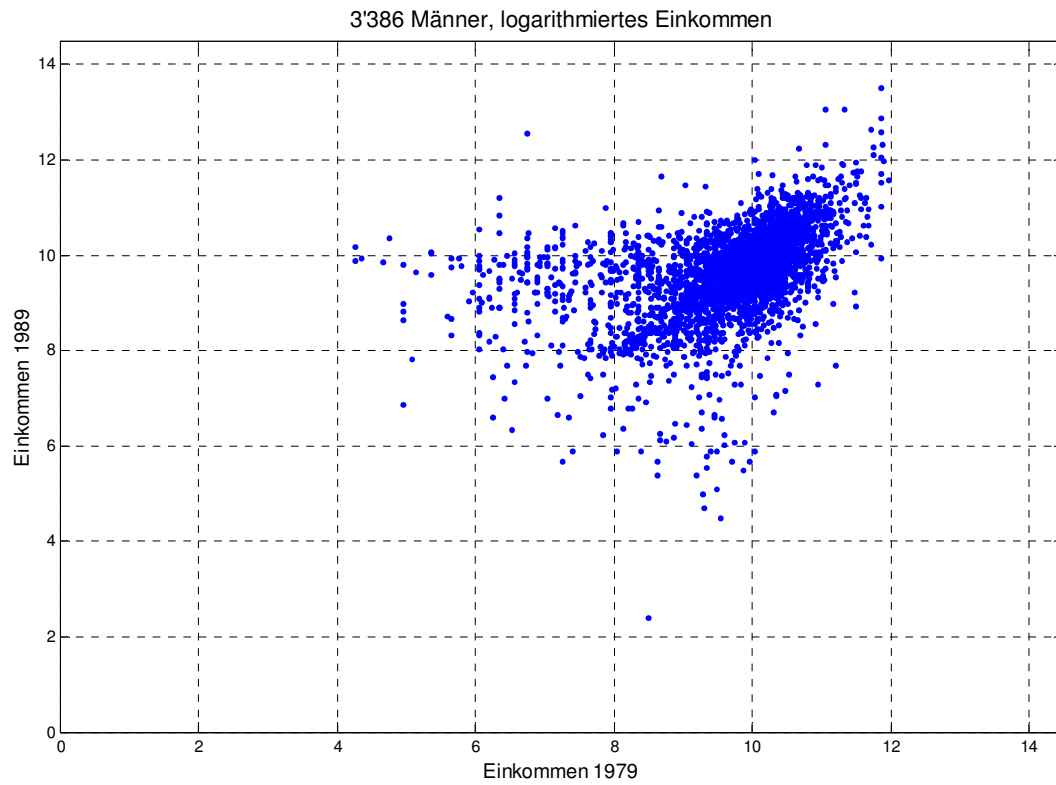
### 9.3.2.1 Streudiagramme der PSID-Daten

Beim betrachten der folgenden drei Streudiagramme (Abbildung 9-12 bis Abbildung 9-14) der PSID-Daten ist ersichtlich, dass der Grossteil der logarithmierten Einkommensdaten in beiden Jahren zwischen 8 und 11 liegt. Es erscheint somit sinnvoll, die zehn äquidistanten Gitterpunkte so zu wählen, dass sie dieses Intervall gut abdecken. Auch sollten die Einkommensverteilungen der Burkhauser-Daten (Abbildung 5-1) vernünftig abgedeckt werden. Die Gitterpunkte und die daraus abgeleiteten Einkommensgrenzen in Tabelle 5-1 erfüllen diese Kriterien gut. Versuche mit ande-

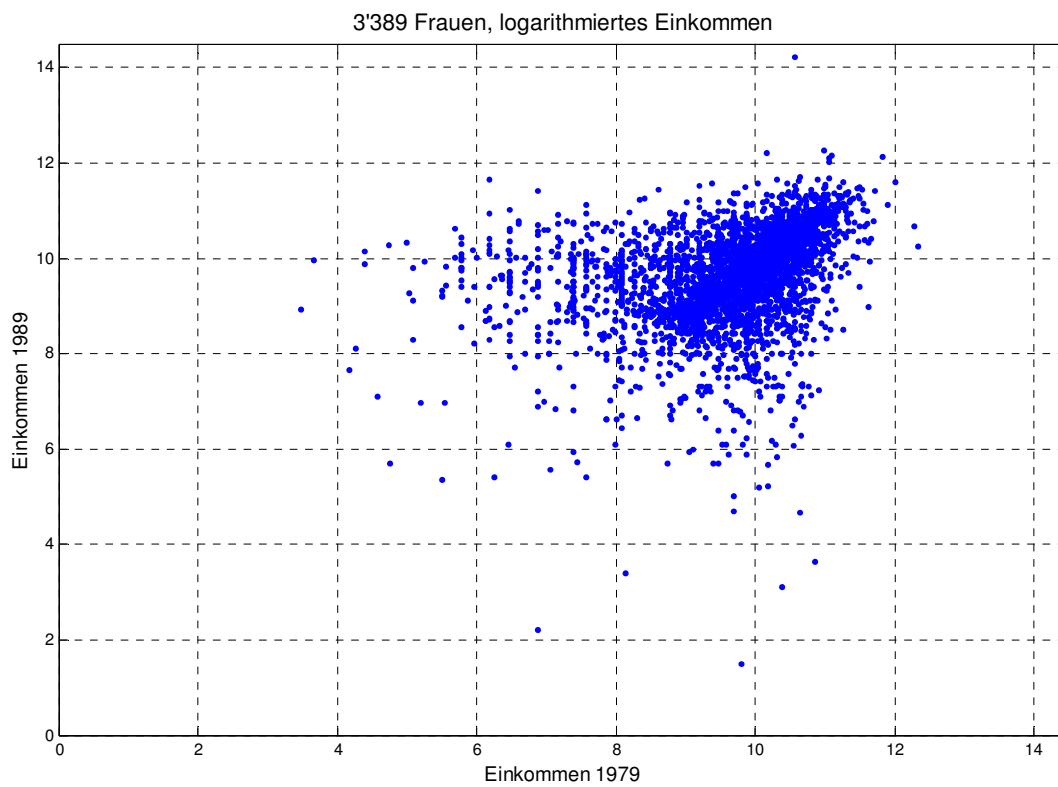
ren Gitterpunkten, welche ein etwas grösseres Einkommensintervall abdeckten, führten zu vergleichbaren Resultaten und Schlussfolgerungen. Die Resultate scheinen deshalb erstaunlich robust hinsichtlich der Wahl der Einkommensgrenzen zu sein, solange diese nach vernünftigen Kriterien, welche ihrerseits von den vorhandenen Daten abhängig sind, gesetzt werden.



**Abbildung 9-12:** Streudiagramm der PSID-Daten der Männer und Frauen



**Abbildung 9-13:** Streudiagramm der PSID-Daten der Männer



**Abbildung 9-14:** Streudiagramm der PSID-Daten der Frauen

### 9.3.2.2 Beispiel einer AR(1)-Hypothese

Der Diskretisierung der AR(1)-Hypothese gemäss Tauchen (1986) liegt die folgende Umformung von Gleichung (6-1) zugrunde:

$$(9-15) \quad \varepsilon_t = (y_t - \bar{y}) - \rho \cdot (y_{t-1} - \bar{y}) \sim \text{IIN}(0, (1 - \rho^2) \cdot s^2).$$

Dabei steht  $\bar{y}$  für den zeitlich konstanten Erwartungswert der logarithmierten Einkommen und wird durch den Mittelwert des Jahres 1979 der logarithmierten Einkommen des Burkhauser-Datensatzes geschätzt (vergleiche Abschnitt 4.1). Auch die Varianz  $s^2$  wird aus den logarithmierten Burkhauser-Daten des Jahres 1979 geschätzt. Die Varianz der logarithmierten Einkommen wird ebenfalls als zeitlich konstant angenommen (Abschnitt 6.2.3).

Der autoregressive Parameter  $\rho$  wird durch Minimierung der relativen Entropie der zugehörigen AR(1)-Hypothese  $P_{AR(\rho)}$  hinsichtlich der beobachteten Randverteilungen  $m_{1979}$  und  $m_{1989}$  bestimmt. Um letztere jedoch bestimmen zu können müssen zuerst die Gitterpunkte des AR(1)-Prozesses und damit auch die Einkommensgrenzen festgelegt werden. Die Gitterpunkte werden aus den oben erwähnten Gründen äquidistant gewählt. Zudem sollten sie, da sie die Einkommensgrenzen für alle Beispiele des empirischen Teils dieser Arbeit bestimmen, gut an die logarithmierten Einkommen aller vorkommenden Datensätze angepasst sein.

Im folgenden soll der Zusammenhang der Gitterpunkte, der Einkommensgrenzen und der AR(1)-Hypothese anhand eines parametrischen Modells mit  $K$  Einkommensklassen aufgezeigt werden. Dabei wird mit  $G$  der Vektor der äquidistanten Gitterpunkte bezeichnet. Um jedoch die offensichtlichen Implikationen von Gleichung (9-15) für die Konstruktion einer hypothetischen Übergangsmatrix anwenden zu können, muss  $G$  um den Mittelwert  $\bar{y}$  bereinigt werden:

$$\bar{G} = G - \bar{y} = \begin{bmatrix} g_1 - \bar{y} \\ g_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ g_K - \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \\ \vdots \\ \bar{g}_K \end{bmatrix}.$$

Der mit  $\bar{L}$  bezeichnete Vektor der um den Mittelwert  $\bar{y}$  bereinigten logarithmierten Einkommensgrenzen kann dann folgendermassen dargestellt werden:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \vdots \\ \bar{l}_K \\ \bar{l}_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty \\ \bar{g}_1 + d \\ \vdots \\ \bar{g}_{K-1} + d \\ \infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty \\ \bar{g}_2 - d \\ \vdots \\ \bar{g}_K - d \\ \infty \end{bmatrix}, \quad \text{mit } d = \frac{g_i - g_{i-1}}{2} = \frac{\bar{g}_i - \bar{g}_{i-1}}{2} \quad \forall i = 2, \dots, K.$$

Unter Zuhilfenahme der in Gleichung (9-15) dargestellten Form für den Innovations-term  $\varepsilon_t$  lässt sich dann die hypothetische Übergangsmatrix des AR(1)-Modells für jedes  $\rho$  wie folgt bestimmen:

$$P_{AR(\rho)} = \begin{bmatrix} \Pr(\bar{l}_1 < \varepsilon_t < \bar{l}_2 - \rho \cdot \bar{g}_1) & \Pr(\bar{l}_2 - \rho \cdot \bar{g}_1 < \varepsilon_t < \bar{l}_3 - \rho \cdot \bar{g}_1) & \cdots & \Pr(\bar{l}_K - \rho \cdot \bar{g}_1 < \varepsilon_t < \bar{l}_{K+1}) \\ \Pr(\bar{l}_1 < \varepsilon_t < \bar{l}_2 - \rho \cdot \bar{g}_2) & \Pr(\bar{l}_2 - \rho \cdot \bar{g}_2 < \varepsilon_t < \bar{l}_3 - \rho \cdot \bar{g}_2) & \cdots & \Pr(\bar{l}_K - \rho \cdot \bar{g}_2 < \varepsilon_t < \bar{l}_{K+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr(\bar{l}_1 < \varepsilon_t < \bar{l}_2 - \rho \cdot \bar{g}_K) & \Pr(\bar{l}_2 - \rho \cdot \bar{g}_K < \varepsilon_t < \bar{l}_3 - \rho \cdot \bar{g}_K) & \cdots & \Pr(\bar{l}_K - \rho \cdot \bar{g}_K < \varepsilon_t < \bar{l}_{K+1}) \end{bmatrix}.$$

Da die mittelwertadjustierten Einkommensgrenzen  $\bar{l}_1$  und  $\bar{l}_{K+1}$   $-\infty$  respektive  $\infty$  betragen, lässt sich das  $(i,j)$ 'te Element der Hypothese  $P_{AR(\rho)}$  darstellen gemäss:

$$p_{AR(\rho),ij} = \Pr(\bar{l}_j - \rho \cdot \bar{g}_i < \varepsilon_t < \bar{l}_{j+1} - \rho \cdot \bar{g}_i) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, K\},$$

mit  $\varepsilon_t \sim \text{IIN}(0, (1-\rho^2) \cdot s^2)$ .

Die Wahrscheinlichkeit  $p_{AR(\rho),ij}$  in Klasse  $j$  zu enden, bedingt es konnte aus Klasse  $i$  gestartet werden, entspricht somit der Wahrscheinlichkeit, dass der Innovationsterm  $\varepsilon_t$  in das  $j$ -te mittelwertbereinigte Einkommensintervall zu liegen kommt, wobei die Intervallgrenzen jeweils um den  $i$ -ten mittelwertbereinigten und mit  $\rho$  multiplizierten Gitterpunkt reduziert werden müssen. In die "Sprache" von Gleichung (9-15) übersetzt dienen die mittelwertbereinigten Intervallgrenzen als um den Mittelwert reduzierte logarithmierte Einkommen in Periode  $t$  und die mittelwertadjustierten Gitterpunkte als mittelwertbereinigte logarithmierte Einkommen in Periode  $t-1$ :

$$\varepsilon_t = \underbrace{(y_t - \bar{y})}_{\equiv \bar{l}_j \text{ resp. } \bar{l}_{j+1}} - \rho \cdot \underbrace{(y_{t-1} - \bar{y})}_{\equiv \bar{g}_i} \sim \text{IIN}(0, (1-\rho^2) \cdot s^2).$$

Es ist aus diesem Beispiel auch ersichtlich, dass die logarithmierten Gitterpunkte, mit Ausnahme des 1-ten und des K-ten Intervalls, jeweils den Mittelpunkten der entsprechenden logarithmierten Einkommensklassen entsprechen.

### 9.3.3 Definitionen der Ungleichheitsmasse

Bei beiden hier dargestellten Ungleichheitsindices bezeichnet  $y_i$  das Einkommen des  $i$ 'ten Individuums,  $\bar{y}$  das Durchschnittseinkommen und  $N$  die Anzahl betrachteter Einkommen respektive Individuen.

- Atkinson's Ungleichheitsmass (Atkinson, 1970)

$$A_\varepsilon = 1 - \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i}{\bar{y}} \right)^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Für den Ungleichheitsaversionsparameter gilt:  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\varepsilon \neq 1$ .

- Generalisierter Entropieindex (Jenkins, 1991)

$$GE_\alpha = \frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i}{\bar{y}} \right)^\alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha}$$

Für den Transfersensitivitätsparameter gilt:  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$

### 9.3.4 Perfekt mobile Hypothesen und zugehörige Schrödingermultiplikatoren

Hier wird demonstriert, dass die Methode der Minimierung der relativen Entropie jede perfekt mobile Übergangsdynamik  $P_{\text{mod}}$  so anpasst, dass daraus eine perfekt mobile Matrix mit der beobachteten Endverteilung  $m_{t+1}$  in den Zeilen wird. Mit  $\pi_{P_{\text{mod}}}$  wird die Gleichgewichtsverteilung von  $P_{\text{mod}}$  bezeichnet, welche auch in den identischen Zeilen von  $P_{\text{mod}}$  steht. Für perfekt mobile Matrizen  $P_{\text{mod}}$  gilt somit der folgende Zusammenhang:

$$p_{\text{mod},ij} = p_{\text{mod},kj} = \pi_{P_{\text{mod}},j} \quad \forall i, k, j \in \{1, \dots, K\}.$$

Zudem werden die für solche Hypothesen typischen Schrödingermultiplikatoren hergeleitet.

Wird  $\mu$ , die willkürliche Anfangsverteilung der perfekt mobilen Hypothese  $P_{\text{mod}}$ , gleich der beobachteten Anfangsverteilung  $m_t$  gesetzt und berücksichtigt, dass die Anfangsverteilung der optimal angepassten Dynamik mit  $m_t$  identisch ist, vereinfacht sich Gleichung (2-11) zu:

$$\begin{aligned} d_{\text{opt},ij} &= \phi_{t,i} \cdot d_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} \\ \Rightarrow m_{t,i} \cdot p_{\text{opt},ij} &= \phi_{t,i} \cdot \mu_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} = \phi_{t,i} \cdot m_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} = \phi_{t,i} \cdot m_{t,i} \cdot \pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot \phi_{t+1,j} \\ (9-16) \quad p_{\text{opt},ij} &= \phi_{t,i} \cdot \pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot \phi_{t+1,j} \end{aligned}$$

Auflösen des Schrödinger-Systems (2-12) nach den Schrödingermultiplikatoren  $\phi_{t,i}$  und  $\phi_{t+1,j}$  führt zu:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad m_{t,i} &= \phi_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K d_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} = \phi_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K m_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t+1,j} = \phi_{t,i} \cdot m_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K \pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot \phi_{t+1,j} \\ 1 &= \phi_{t,i} \cdot \sum_{j=1}^K \pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot \phi_{t+1,j} \\ (9-17) \quad \phi_{t,i} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^K \pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot \phi_{t+1,j}} = c \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}. \end{aligned}$$

Die mit den Anfangsrestriktionen verbundenen Schrödingermultiplikatoren  $\phi_{t,i}$  sind also konstant.

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad m_{t+1,j} &= \phi_{t+1,j} \cdot \sum_{i=1}^K d_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t,i} = \phi_{t+1,j} \cdot \sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot p_{\text{mod},ij} \cdot \phi_{t,i} = \phi_{t+1,j} \cdot \sum_{i=1}^K m_{t,i} \cdot \pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot c \\ m_{t+1,j} &= \phi_{t+1,j} \cdot \pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot c \\ (9-17)' \quad \phi_{t+1,j} &= \frac{m_{t+1,j}}{\pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot c}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Resultate für  $\phi_{t,i}$  und  $\phi_{t+1,j}$  in Gleichung (9-16) führt zur optimal angepassten Dynamik gemäss:

$$p_{\text{opt},ij} = c \cdot \pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot \frac{m_{t+1,j}}{\pi_{P_{\text{mod},j}} \cdot c} = m_{t+1,j} \cdot$$

Die resultierende optimal angepasste Dynamik  $P_{\text{opt}}$  enthält somit in ihren Zeilen die beobachtete Endverteilung  $m_{t+1}$ . Nach Anwendung der Methode der Minimierung der relativen Entropie führen somit alle perfekt mobilen Hypothesen  $P_{\text{mod}}$  zur selben optimal angepassten Übergangsdynamik  $P_{\text{opt}}$ .

Da die Schrödingermultiplikatoren  $\phi_{t,i}$  und  $\phi_{t+1,j}$  nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt sind, wird  $\phi_{t,1} = \phi_{t+1,1}$  gesetzt. Somit lassen sich  $\phi_{t,1}$  und  $\phi_{t+1,1}$  aus (9-16) wie folgt bestimmen:

$$p_{\text{opt},11} = m_{t+1,1} = \phi_{t,1} \cdot \pi_{P_{\text{mod},1}} \cdot \phi_{t+1,1} \quad \Rightarrow \quad \phi_{t,1} \cdot \phi_{t+1,1} = \phi_{t,1}^2 = \phi_{t+1,1}^2 = \frac{m_{t+1,1}}{\pi_{P_{\text{mod},1}}}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_{t,1} = \phi_{t+1,1} = \sqrt{\frac{m_{t+1,1}}{\pi_{P_{\text{mod},1}}}} \cdot$$

Die Schrödingermultiplikatoren lassen sich durch Einsetzen dieses Resultats in die Gleichungen (9-17) und (9-17)' folgendermassen festlegen:

$$\phi_{t,i} = \sqrt{\frac{m_{t+1,1}}{\pi_{P_{\text{mod},1}}}} \quad \forall i ; \quad \phi_{t+1,j} = \sqrt{\frac{\pi_{P_{\text{mod},1}}}{m_{t+1,1}}} \cdot \frac{m_{t+1,j}}{\pi_{P_{\text{mod},j}}} \quad \forall j \cdot$$

## 9.4 EINKOMMENSVERGLEICH MÄNNER / FRAUEN IN 5-JAHRESPERIODEN

### 9.4.1 Einleitung

Die hier vorgestellten Resultate entstammen der ersten Arbeit von Aebi, Neusser und Steiner (1999). Analog zu Kapitel 7 wird hier die Einkommensdynamik von Frauen und Männern in den USA verglichen. Konkret wird die Fragestellung untersucht, ob sich die Dynamik der Arbeitseinkommen der Frauen genügend genau durch diejenige der Männer erklären lässt. Die benötigten Daten wurden wiederum der Panel Study of Income Dynamics (PSID) entnommen. Wie in Abschnitt 4.2 erwähnt enthält



der Datensatz "1968-1993 individual file" neben einer Vielzahl anderer Angaben auch die Jahreseinkommen von 53'013 Individuen in den Jahren 1967 bis 1992. Für die hier angestellten Untersuchungen wurde diese Zeitperiode in 5-Jahres-Intervalle unterteilt. Im Gegensatz zur Vorgehensweise in Kapitel 7 wurden hier nur diejenigen Individuen untersucht, welche in den jeweils betrachteten Anfangs- und Endperioden ein positives Arbeitseinkommen auswiesen.

### 9.4.2 Die Datenlage

Die extrahierten Variablen aller betrachteten Jahre sind in Tabelle 9-3 zusammengefasst. Wegen einer Änderung in der Datenerhebung seit der Erhebung von 1991, wo die Variable für das totale Jahreseinkommen in zwei Variablen für das Arbeits- und das Einkommen aus Finanzanlagen aufgeteilt wurde, erscheint im Jahr 1992 die Variable über den Einkommenstypus nicht mehr. In den früheren Jahren besagt diese Variable, ob ein Jahreseinkommen nur aus Erwerbseinkommen, nur aus Anlageeinkommen oder aus beiden zusammengestellt ist.

Jahr	Variable	Kurzbeschreibung	Jahr	Variable	Kurzbeschreibung
1967	V30013	Total 1967 Work Hours	1982	V30417	Annual Work Hours 1982
	V30004	Age of Individual		V30402	Age of Individual
	V30011	Type of Income		V30414	Type of Taxable Income 1982
	V30012	Total 1967 Income		V30415	Total Taxable Income 1982
1972	V30131	Total 1972 Work Hours	1987	V30588	Annual Work Hours - Individual
	V30120	Age of Individual		V30573	Age of Individual
	V30129	Type of Income		V30585	Type of Taxable Income
	V30130	Total 1972 Money Income		V30586	Total 1987 Taxable Income
1977	V30270	Total 1977 Work Hours	1992	V30823	1992 Annual Work Hours
	V30249	Age of Individual		V30809	Age of Individual
	V30267	Type of Taxable Income		V30821	Total Labor Income
	V30268	Total 1977 Taxable Money Income	All Years	V32000	Sex of Individual

**Tabelle 9-3:** Extrahierte PSID-Variablen

Die Resultate der letzten 5-Jahres-Periode (1987 bis 1992) werden in Abschnitt 9.4.3 ausführlicher dargestellt. Die restlichen 5-Jahres-Intervalle sind dann in Abschnitt 9.4.4 zusammengefasst.

### 9.4.3 Die Periode 1987 bis 1992

Um sensitive und bedeutungsvolle Resultate zu erhalten wurde nur eine Subgruppe des gesamten Samples benutzt. Im Detail wurden die folgenden Restriktionen angewandt:

- Beschränkung auf das Erwerbseinkommen.
- Es wurden nur Individuen betrachtet, die im Startjahr des 5-Jahres-Intervalls mindestens 20 und im Endjahr höchstens 60 Jahre alt waren.
- Nur vollbeschäftigte Personen wurden betrachtet. Individuen mit weniger als 1800 Arbeitsstunden pro Jahr wurden aus der Betrachtung ausgeschlossen.
- Trotz dieser Restriktionen verblieben einige extreme Ausreisser in der Stichprobe.<sup>133</sup> Um diese zu eliminieren wurde ein minimales Jahreseinkommen von 1'000 USD im Jahre 1967 eingeführt. Dieses Minimum wurde in den folgenden Jahren mit der Wachstumsrate des mittleren Einkommens inflationiert.

Nach der Durchführung der oben erwähnten Einschränkungen enthielt der Datensatz der Männer, der als Referenz diente, noch 1'180 Individuen. Derjenige der Frauen reduzierte sich auf 935 Individuen. Um Übergangsmatrizen und diskrete zweidimensionale Dichten zu konstruieren, mussten die entsprechenden Einkommensklassengrenzen des Start- und des Endjahres festgelegt werden. Dabei wurde willkürlich  $K = 10$  gesetzt und die Einkommensgrenzen beider Jahre so gewählt, dass sich die

---

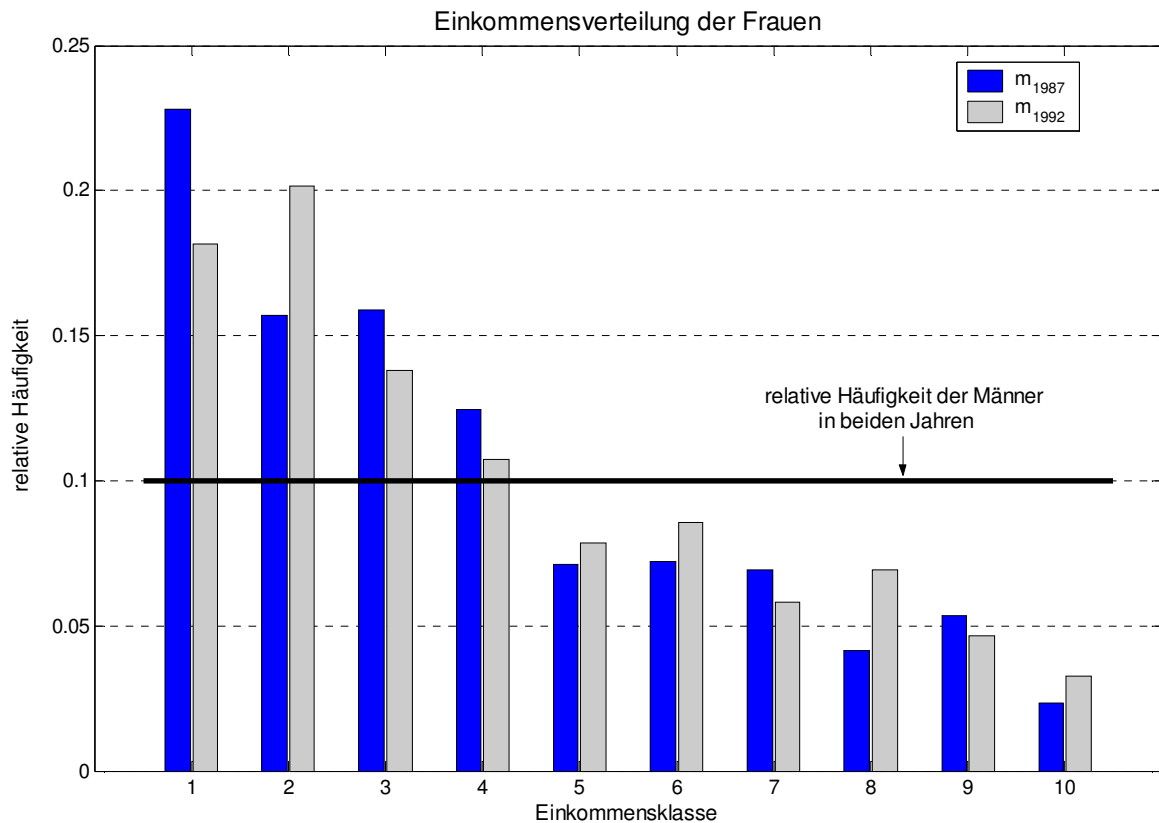
<sup>133</sup> Die folgenden Beispiele zeigen zwei Fälle extremer Ausreisser. Das Individuum Nummer 2'059 arbeitete 2'728 Stunden im Jahr 1992, verdiente jedoch lediglich 15\$. Individuum Nummer 32'416 arbeitete 2'080 Stunden im Jahr 1987, erwirtschaftete jedoch nur ein jährliches Einkommen von 14\$. Während solche Fälle in den Jahren vor 1992 mit Sicherheit ausgeschlossen sein sollten, wäre dieser Fall, wegen der 1991 erfolgten Änderung in der Datenerhebung, für das Jahr 1992 theoretisch möglich. Es wäre zum Beispiel vorstellbar, dass jemand eine Menge Zeit für die Betreuung eigener Finanzanlagen aufwendete, ohne irgendwo angestellt gewesen zu sein. Eine solche Person könnte ein grosses Kapitaleinkommen, jedoch nur ein kleines Arbeitseinkommen erzielen. In den anderen Jahren wurden hingegen bloss solche Individuen selektioniert, deren Jahreseinkommen sich nur aus Arbeitseinkommen zusammensetzte. Die dort angegebenen Jahresarbeitsstunden müssten folglich zu 100% zur Erzielung des jährlichen Erwerbseinkommens aufgewendet worden sein.

Zahl der Männer gleichmässig auf die je 10 Zellen der Anfangs- und der Endverteilung verteilte. Somit ist das  $i$ 'te Intervall durch die Grenzen des  $(i - 1)$ 'ten und des  $i$ 'ten Dezils der Einkommensverteilung der Männer begrenzt. Durch diese Art der Konstruktion ist die Einkommensdynamik der Männer, welche als Hypothese für die Dynamik der Frauen dienen wird, in ihrem Gleichgewichtszustand. Auch spielt das Wachstum im mittleren Einkommen der Männer durch das flexible setzen der Einkommensgrenzen keine Rolle mehr.

Die Einkommen der Frauen wurden gemäss der Grenzen der entsprechenden Männerverteilung eingeteilt. Dadurch wurden die Randdichten der Frauen für das Anfangs- und das Endjahr festgelegt. Für den Fall, dass ein oder mehrere Fraueneinkommen mit einem Begrenzungswert zusammenfallen sollten, wurden diese Beobachtungen gleichmässig auf die zwei benachbarten Zellen der Randverteilung aufgeteilt. Im Unterschied zu den Betrachtungen in Kapitel 7 wurden hier die Einkommensdaten der Frauen und der Männer nicht auf identische Mittelwerte gebracht. Unterschiede im Einkommensverteilungsprozess von Frauen und Männern zeigen hier also nicht bloss Differenzen in der reinen Einkommensdynamik auf, sie reflektieren auch andere geschlechterspezifische Unterschiede wie die durchschnittlich geringere Einkommenshöhe der Frauen. Auch eventuelle Unterschiede im durchschnittlichen Einkommenswachstum von Frauen und Männern werden hier nicht durch die Konstruktion eliminiert.

Die Einkommensverteilung der Frauen in den beiden Jahren 1987 und 1992 sind in Abbildung 9-15 dargestellt. Diese beiden Randdichten werden im folgenden als Querschnittsverteilungen  $m_{1987}$  und  $m_{1992}$  der Grundgesamtheit der Frauen betrachtet, an welche die hypothetische Dynamik mittels der Methode der Minimierung der relativen Entropie optimal angepasst wird. Für Vergleichszwecke ist in dieser Abbildung auch die Randverteilung der Männer eingezeichnet, die in beiden Jahren aus Konstruktionsgründen uniform 0.1 ist. Diese Grafik zeigt auf, dass sich der Modus der Frauenverteilung von der ersten in die zweite Einkommensklasse verlagert hat. Zusätzlich befinden sich 1992 mehr Frauen in den oberen Einkommensklassen als 1987. Abbildung 9-15 verdeutlicht somit das Faktum, dass das mittlere Einkommen der betrachteten Frauen zwischen 1987 und 1992 stärker wuchs (+44.6 %) als dasjenige der betrachteten Männer (+39.9 %). Trotz dieses Unterschieds bleiben die

mittleren Einkommen der Frauen weiterhin deutlich unter denjenigen der Männer. Diese einfachen Betrachtungen zeigen auf, dass sich die Einkommensverteilung der Frauen in der betrachteten Fünfjahresperiode offensichtlich verändert hat. Es soll nun die Frage zu beantworten versucht werden, ob diese Veränderungen durch die geschätzte Einkommensdynamik der Männer erklärt werden können.



**Abbildung 9-15:** Einkommensverteilungen

#### 9.4.3.1 Empirische Resultate

Die Einkommensdynamik der Männer wird durch die zweidimensionale Dichtematrix in Tabelle 9-4 sowie die zugehörige Übergangsmatrix in Tabelle 9-5 repräsentiert.<sup>134</sup>

<sup>134</sup> Die hypothetische Dichte  $D_{\text{mod}}$  wurde hier vollständig aus den Daten der Männer geschätzt. Zum Zeitpunkt, als die hier gezeigten Resultate erarbeitet wurden, waren die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.4, wonach die bestmögliche Hypothese gemäss  $D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_{1987}) \cdot P_{\text{mod}}$  gewählt werden

Im Gegensatz zu den Untersuchungen in den Kapiteln 5 und 7 wurden diese Matrizen nicht durch einen Kerndichteschätzer ermittelt, die hier vorkommenden Nullelemente in einigen Zellen sind eine unerwünschte Folge dieses Vorgehens.

		Einkommensklasse 1992									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1987	1	0.0441	0.0161	0.0119	0.0110	0.0085	0.0042	0.0008	0.0008	0.0008	0.0017
	2	0.0212	0.0254	0.0153	0.0085	0.0110	0.0068	0.0076	0.0017	0.0017	0.0008
	3	0.0102	0.0263	0.0186	0.0093	0.0144	0.0093	0.0068	0.0025	0.0017	0.0008
	4	0.0110	0.0169	0.0203	0.0127	0.0102	0.0085	0.0093	0.0068	0.0017	0.0025
	5	0.0042	0.0051	0.0169	0.0178	0.0161	0.0136	0.0119	0.0042	0.0068	0.0034
	6	0.0017	0.0059	0.0068	0.0186	0.0178	0.0178	0.0178	0.0068	0.0025	0.0042
	7	0.0025	0.0034	0.0034	0.0093	0.0161	0.0169	0.0186	0.0144	0.0110	0.0042
	8	0.0017	0.0008	0.0042	0.0085	0.0034	0.0110	0.0203	0.0280	0.0136	0.0085
	9	0.0034	0	0.0008	0.0025	0.0017	0.0076	0.0059	0.0229	0.0390	0.0161
	10	0	0	0.0017	0.0017	0.0008	0.0042	0.0008	0.0119	0.0212	0.0576

**Tabelle 9-4:** Zweidimensionale Dichte der Männer der Periode 1987 bis 1992,  $D_{\text{mod}}$

		Einkommensklasse 1992									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1987	1	0.4407	0.1610	0.1186	0.1102	0.0847	0.0424	0.0085	0.0085	0.0085	0.0169
	2	0.2119	0.2542	0.1525	0.0847	0.1102	0.0678	0.0763	0.0169	0.0169	0.0085
	3	0.1017	0.2627	0.1864	0.0932	0.1441	0.0932	0.0678	0.0254	0.0169	0.0085
	4	0.1102	0.1695	0.2034	0.1271	0.1017	0.0847	0.0932	0.0678	0.0169	0.0254
	5	0.0424	0.0508	0.1695	0.1780	0.1610	0.1356	0.1186	0.0424	0.0678	0.0339
	6	0.0169	0.0593	0.0678	0.1864	0.1780	0.1780	0.1780	0.0678	0.0254	0.0424
	7	0.0254	0.0339	0.0339	0.0932	0.1610	0.1695	0.1864	0.1441	0.1102	0.0424
	8	0.0169	0.0085	0.0424	0.0847	0.0339	0.1102	0.2034	0.2797	0.1356	0.0847
	9	0.0339	0	0.0085	0.0254	0.0169	0.0763	0.0593	0.2288	0.3898	0.1610
	10	0	0	0.0169	0.0169	0.0085	0.0424	0.0085	0.1186	0.2119	0.5763

**Tabelle 9-5:** Übergangsmatrix der Männer zwischen 1987 und 1992,  $P_{\text{mod}}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.80226 (0.01378)

Die Zellwahrscheinlichkeiten werden durch die Maximum-Likelihood-Methode geschätzt, die hier der relativen Häufigkeit entspricht. Diese Schätzer sind asymptotisch normalverteilt, so dass sich asymptotische Standardfehler leicht berechnen lassen.

---

sollte, noch nicht bekannt. Da das hier gewählte Vorgehen nicht zu einer anderen optimal adjustierten Dynamik  $P_{\text{opt}}$  respektive  $D_{\text{opt}}$  führt, wurden die Berechnungen so belassen.

Die zweidimensionale Dichte und die Übergangsmatrix der Männer übernehmen im folgenden die Rolle des Modells und dienen als Nullhypothese. Sie entsprechen somit den Matrizen  $D_{\text{mod}}$  und  $P_{\text{mod}}$ . Für Vergleichszwecke wurde noch der Prais' Mobilitätsindex für Übergangsmatrizen (Shorrocks 1978; vergleiche Tabelle 3-1) berechnet.<sup>135</sup>

Das Ziel der empirischen Untersuchung kann in der Sprache von Kapitel 2 reformuliert werden: Schätze die wahrscheinlichste Anpassung der zweidimensionalen Dichte der Männer (Modell), wenn die Einkommens-Randverteilungen der Frauen in den Jahren 1987 und 1992 als gegeben betrachtet werden. Die PSID-Daten würden es natürlich erlauben, die zweidimensionale Dichte und die Übergangsmatrix der Frauen direkt zu bestimmen und eine traditionelle statistische Analyse durchzuführen. Diese zusätzliche Information wird hier jedoch ignoriert. Sie wird hingegen später benötigt um aufzuzeigen, dass der Ansatz sensitive und bedeutungsvolle Resultate liefert und dass die Anpassung in die richtige Richtung geht.

Nun wird das Schrödinger-System (2-12) mit der Methode der iterativen proportionalen Anpassung (IPFP) gelöst. Daraus resultiert die "wahrscheinlichste" angepasste zweidimensionale Dichtematrix  $D_{\text{opt}}$ , welche in Tabelle 9-6 dargestellt ist.

---

<sup>135</sup> Schlüter (1998) und Trede (1999) liefern einen statistischen Ansatz zur Analyse von Mobilitätsindizes. Da die in Kapitel 9.4 vorgestellten Resultate vor der Mobilitätsdiskussion in Kapitel 3 erarbeitet wurden und weil der Mobilitätsaspekt hier keine zentrale Rolle spielt, wurde auf die nachträgliche Berechnung des in Kapitel 3 vorgestellten Indexpaars (Gleichgewichts- und Periodenindex) verzichtet.

		Einkommensklasse 1992									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1987	1	0.1034	0.0473	0.0274	0.0228	0.0125	0.0080	0.0012	0.0018	0.0013	0.0022
	2	0.0349	0.0525	0.0247	0.0123	0.0114	0.0090	0.0074	0.0025	0.0018	0.0008
	3	0.0172	0.0556	0.0310	0.0139	0.0153	0.0127	0.0067	0.0038	0.0018	0.0008
	4	0.0152	0.0292	0.0275	0.0154	0.0088	0.0094	0.0075	0.0082	0.0015	0.0019
	5	0.0037	0.0056	0.0146	0.0138	0.0089	0.0096	0.0061	0.0033	0.0038	0.0016
	6	0.0016	0.0069	0.0062	0.0152	0.0103	0.0133	0.0097	0.0055	0.0015	0.0021
	7	0.0024	0.0039	0.0031	0.0076	0.0093	0.0127	0.0102	0.0117	0.0065	0.0022
	8	0.0009	0.0006	0.0023	0.0041	0.0012	0.0049	0.0066	0.0137	0.0048	0.0026
	9	0.0026	0	0.0006	0.0017	0.0008	0.0046	0.0026	0.0152	0.0187	0.0067
	10	0	0	0.0006	0.0006	0.0002	0.0013	0.0002	0.0039	0.0050	0.0118

Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$

**Tabelle 9-6:** "Wahrscheinlichste" angepasste zweidimensionale Dichtematrix,  $D_{\text{opt}}$

Die zugehörige Übergangsmatrix ist in Tabelle 9-7 dargestellt und die entsprechenden Schrödingermultiplikatoren finden sich in Abbildung 9-16.

		Einkommensklasse 1992									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1987	1	0.4540	0.2078	0.1201	0.1002	0.0548	0.0352	0.0051	0.0077	0.0055	0.0096
	2	0.2221	0.3338	0.1571	0.0784	0.0724	0.0574	0.0471	0.0157	0.0113	0.0049
	3	0.1082	0.3502	0.1950	0.0876	0.0962	0.0801	0.0425	0.0238	0.0115	0.0050
	4	0.1216	0.2343	0.2206	0.1238	0.0704	0.0755	0.0606	0.0659	0.0119	0.0154
	5	0.0524	0.0787	0.2059	0.1941	0.1248	0.1353	0.0863	0.0462	0.0532	0.0230
	6	0.0217	0.0951	0.0852	0.2105	0.1428	0.1838	0.1340	0.0764	0.0207	0.0298
	7	0.0338	0.0565	0.0444	0.1095	0.1344	0.1821	0.1461	0.1690	0.0931	0.0310
	8	0.0225	0.0141	0.0553	0.0993	0.0282	0.1181	0.1590	0.3273	0.1143	0.0618
	9	0.0478	0	0.0117	0.0316	0.0150	0.0868	0.0492	0.2843	0.3489	0.1246
	10	0	0	0.0264	0.0237	0.0084	0.0542	0.0079	0.1656	0.2130	0.5009

Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{\text{mod}}$

**Tabelle 9-7:** "Wahrscheinlichste" angepasste Übergangsmatrix,  $P_{\text{opt}}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.80684 (0.01988)

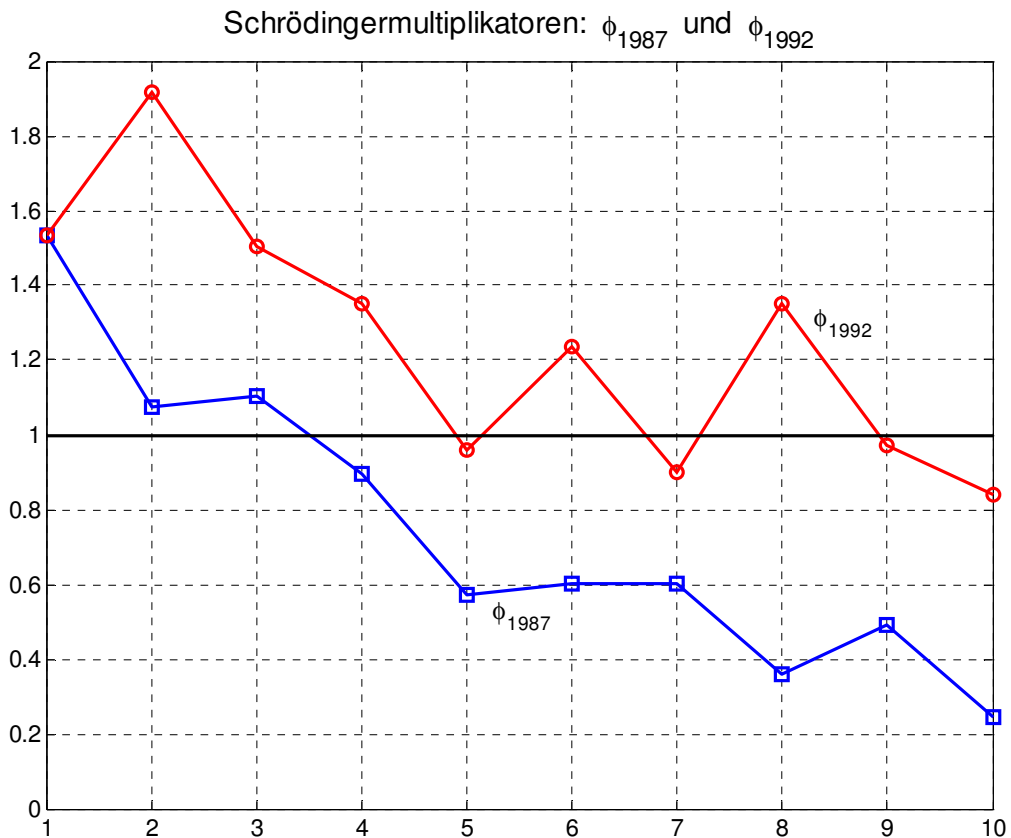


Abbildung 9-16: "Wahrscheinlichste" Anpassungen

In Tabelle 9-8 finden sich die Kreuzprodukte der Schrödingermultiplikatoren, das heisst die Matrix der Anpassungskoeffizienten  $(\phi_{1987,i} \cdot \phi_{1992,j})_{i,j = 1, \dots, 10}$ .

		Einkommensklasse 1992									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1987	1	2.347	2.940	2.306	2.071	1.472	1.894	1.382	2.068	1.490	1.288
	2	1.648	2.064	1.619	1.454	1.033	1.330	0.970	1.452	1.046	0.905
	3	1.690	2.117	1.661	1.492	1.060	1.364	0.995	1.490	1.073	0.928
	4	1.375	1.722	1.351	1.214	0.862	1.110	0.810	1.212	0.873	0.755
	5	0.879	1.101	0.864	0.776	0.551	0.710	0.518	0.775	0.558	0.483
	6	0.924	1.157	0.908	0.815	0.579	0.746	0.544	0.814	0.586	0.507
	7	0.925	1.159	0.910	0.817	0.580	0.747	0.545	0.816	0.588	0.508
	8	0.554	0.694	0.544	0.489	0.347	0.447	0.326	0.488	0.352	0.304
	9	0.754	0.944	0.741	0.665	0.473	0.609	0.444	0.664	0.479	0.414
	10	0.373	0.467	0.366	0.329	0.234	0.301	0.219	0.328	0.237	0.205

	Werte über 2.0
	Werte unter 0.5

Tabelle 9-8: "Wahrscheinlichste" Anpassungen pro Zelle (Kreuzprodukt von  $\phi_{1987}$  und  $\phi_{1992}$ )



Diese Zahlen zeigen auf, mit welchen Faktoren die entsprechenden Zellen der zweidimensionalen Dichte der Männer multipliziert werden müssen, um die "wahrscheinlichste" zweidimensionale Dichte der Frauen zu erhalten. Eine genauere Betrachtung dieser Matrix enthüllt, dass grosse Werte (Werte grösser als 2) in der oberen linken Ecke der Matrix konzentriert sind, während sich kleine Werte (Werte kleiner als 0.5) in der unteren rechten Ecke häufen.<sup>136</sup> Dies bedeutet zum Beispiel, dass die Wahrscheinlichkeit, 1987 in der untersten und 1992 in der zweituntersten Einkommensklasse zu sein, gemäss der "wahrscheinlichsten" Anpassung für Frauen beinahe dreimal grösser ist als für Männer. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, in beiden Jahren in der höchsten Einkommensklasse zu sein, für die Frauen fünfmal kleiner als für die Männer. Die Resultate lassen sich so verallgemeinern, dass die Wahrscheinlichkeiten, in tiefen Einkommensklassen zu sein, erhöht und jene, in hohen Klassen zu sein, reduziert werden müssen.

Die Schrödingermultiplikatoren in Abbildung 9-16 zeigen, dass die Anpassungen nach unten hauptsächlich von der Verteilung des Jahres 1987 ( $\phi_{1987,i} < 1$  für  $i \geq 4$ ) stammen, während die Anpassungen nach oben mehr auf die Verteilung des Jahres 1992 ( $\phi_{1992,j} > 1$  für  $j \leq 4$  und  $\phi_{1992,j} \approx 1$  für  $j \geq 5$ ) zurückzuführen sind. Dies scheint sinnvoll angesichts der in Abbildung 9-15 beobachteten Verschiebung der Einkommensverteilung der Frauen.

Wie im theoretischen Teil erwähnt kann die relative Entropie der "wahrscheinlichsten" angepassten Dichtematrix (Tabelle 9-6) in Bezug auf die zweidimensionale Dichte der Männer (Tabelle 9-4) dazu benutzt werden, aufzuzeigen ob die Anpassungen statistisch signifikant sind. Der Wert der relativen Entropie beträgt  $H = 0.2069$  und die zugehörige Teststatistik (2-16) lautet  $2 \cdot n \cdot H = 2 \cdot 1'180 \cdot 0.2069 = 488.28$ . Auf dem 1%-Niveau beträgt der kritische Wert der  $\chi^2$ -Verteilung mit 18 Freiheitsgraden 34.81. Die Nullhypothese, dass die Dynamik der Männer diejenige der Frauen ausreichend beschreibt, muss somit klar abgelehnt werden.<sup>137</sup>

---

<sup>136</sup> Dieses Muster ist typisch. Für andere Perioden werden ähnliche Resultate erhalten.

<sup>137</sup> Auch die bestmögliche Hypothese  $D_{\text{mod}}^* = \text{diag}(m_{1987}) \cdot P_{\text{mod}}$  (vergleiche Abschnitt 2.4 und Fussnote 134, S. 262) müsste auf dem 1%-Niveau abgelehnt werden. Die  $\chi^2$ -Teststatistik fällt jedoch mit

Da der PSID-Datensatz genügend Information enthält um die "wahre" zweidimensionale Dichte der Frauen zu berechnen, kann die optimale Anpassung auch damit verglichen werden. Die relative Entropie  $H(D_{\text{wahr}}|D_{\text{mod}})$  der "wahren" Dichtematrix der Frauen in Bezug auf diejenige der Männer beträgt 0.2829, die Entropie  $H(D_{\text{wahr}}|D_{\text{opt}})$  der "wahren" Frauenmatrix in Bezug auf die angepasste zweidimensionale Dichte beträgt jedoch nur 0.0760. Dies entspricht einer klaren Verbesserung und zeigt auf, dass die Anpassung in die richtige Richtung zeigt.

Meistens werden in der Praxis die Übergangsmatrizen anstelle der zweidimensionalen Dichten interpretiert. Deshalb wurde in Tabelle 9-7 die "wahrscheinlichste" angepasste Übergangsmatrix wie in Gleichung (2-13) berechnet. Hier sind nur zwei Zellen ersichtlich, die eine auf dem 5%-Niveau signifikante Änderung erfahren haben. In beiden Fällen wurden die Wahrscheinlichkeiten nach oben korrigiert was hier bedeutet, dass Frauen eine signifikant höhere Wahrscheinlichkeit haben, in der zweiten Einkommensklasse zu bleiben oder aus der dritten in die zweite zurückzufallen. Wegen der grossen Ähnlichkeit der Übergangsmatrizen, die auch in ähnlichen Mobilitätsindices zum Ausdruck kommt, kann geschlossen werden, dass die Differenzen zwischen der hypothetischen und der optimal ajustierten zweidimensionalen Dichte zum grossen Teil auf Unterschiede in der (aus der Vergangenheit ererbten) anfänglichen Einkommensverteilung zurückzuführen sind denn auf die Einkommensdynamik an sich.

#### 9.4.3.2 Schlussbemerkungen

Im vorangehenden Abschnitt wurde der in Kapitel 2 entwickelte Ansatz zur Evaluation von Theorien über die Dynamik von Einkommensverteilungen auf die Einkommensdynamiken der Männer und der Frauen der USA in der Periode 1987 bis 1992 angewandt. Damit wurde die Gültigkeit sowie die Nützlichkeit dieser Methode aufge-

---

84.46 deutlich niedriger als für die rein aus den Männerdaten geschätzte Hypothese (kritischer Wert auf dem 1%-Signifikanzniveau bei 9 Freiheitsgraden: 21.67).

zeigt. Das Beispiel in dieser Arbeit war nichts anderes als ein erster Test.<sup>138</sup> Der verwendete PSID-Datensatz enthielt mehr Information als benötigt. Im Prinzip wäre die Übergangsmatrix der Frauen direkt aus den Daten schätzbar und mit derjenigen der Männer mittels konventioneller statistischer Methoden vergleichbar gewesen. Der Vorteil der PSID-Daten liegt darin, dass sie es erlauben, aufzuzeigen und zu prüfen, ob die Anpassungen der Modelldynamik in die richtige Richtung weisen. Dies konnte klar bestätigt werden.

Wie in Kapitel 6 gezeigt wurde, lässt sich die Methode auch auf Untersuchungen anwenden, wo solche zusätzliche Information nicht vorhanden ist. Zudem sind weitere Anwendungsmöglichkeiten denkbar, so könnten zum Beispiel die Differenzen in der Einkommensdynamik zwischen Ländern oder im Zeitablauf untersucht werden. Zudem liesse sich der Ansatz der Minimierung der relativen Entropie auch dazu verwenden, spezifische Theorien über die Einkommensdynamik, wie sie von Conlisk (1990), Dardanoni (1995) oder Wagner (1978) vorgeschlagen wurden, anhand wirklicher Daten zu testen (vergleiche hierzu Kapitel 6).

Auf der methodischen Seite wäre eventuell die Erweiterung der Analyse zu stetigen Zustandsräumen wünschenswert. Dies beinhaltet jedoch das Problem der Wahl einer etwas willkürlichen Partition des Zustandsraums. Obschon das kombinatorische Argument, welches in Kapitel 2 verwendet wurde, nicht in den stetigen Raum überführt werden kann, erscheint eine solche Erweiterung möglich, jedoch konzeptuell äusserst schwierig (Föllmer 1988, Aebi und Nagasawa 1992) und würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen.

---

<sup>138</sup> Der Vergleich der Einkommensdynamiken von Männern und Frauen, wie er in Kapitel 7 angestellt wurde, ist aus mehreren Gründen aussagekräftiger. Zum einen wurden dort die reinen Einkommensverteilungsdynamiken verglichen, geschlechterspezifische Unterschiede im Einkommensniveau sowie im Wachstum des mittleren Einkommens wurden vollständig eliminiert. Auch wurden dort alle Dynamiken mittels zweidimensionaler Kerndichteschätzung ermittelt. Dieses Vorgehen führt zu unproblematischen positiven Dynamiken. So lassen sich Vergleiche zwischen  $D_{\text{mod}}$ ,  $D_{\text{opt}}$  und  $D_{\text{wahr}}$  immer anstellen, die Vergleiche mit der wahren Dynamik sind nicht, wie hier, abhängig vom Zufall, dass  $D_{\text{wahr}}$  absolut stetig zu  $D_{\text{mod}}$  und somit auch zu  $D_{\text{opt}}$  ist.

#### 9.4.4 Die restlichen 5-Jahresperioden

Für die restlichen 5-Jahresintervalle werden hier jeweils die hypothetischen wie auch die optimal angepassten zweidimensionalen Dichten respektive Übergangsmatrizen dargestellt. Ein Vergleich über alle Perioden zeigt deutlich, dass das grundlegende Muster in allen Intervallen ziemlich ähnlich ist. So müssen die Werte der hypothetische Dichte  $D_{\text{mod}}$  in allen Perioden in der linken oberen Ecke nach oben und in der rechten unteren Ecke nach unten korrigiert werden. Dies bedeutet, dass Frauen in allen Perioden verglichen mit Männern eine erhöhte Wahrscheinlichkeit haben, sich in tiefen Einkommensklassen zu finden. Zudem ist ihre Wahrscheinlichkeit, in hohen Klassen zu sein reduziert.

9.4.4.1 1982 bis 1987

		Einkommensklasse 1987									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1982	1	0.04487	0.02949	0.00641	0.00641	0.00513	0.00256	0.00256	0.00256	0	0
	2	0.02179	0.02949	0.01282	0.01538	0.00769	0.00128	0.00641	0.00128	0.00256	0.00128
	3	0.0141	0.01538	0.02692	0.01923	0.00128	0.01026	0.00769	0.00128	0.00385	0
	4	0.00769	0.01154	0.01923	0.02051	0.01154	0.01026	0.00769	0.00513	0.00256	0.00385
	5	0.00385	0.00897	0.01667	0.01538	0.01154	0.01667	0.00897	0.01026	0.00641	0.00128
	6	0.00385	0.00128	0.00897	0.0141	0.02949	0.01538	0.00769	0.00641	0.01154	0.00128
	7	0	0.00128	0.00641	0.00128	0.01795	0.02308	0.02692	0.01282	0.00897	0.00128
	8	0.00128	0.00128	0.00128	0.00385	0.01026	0.01154	0.01667	0.02692	0.01923	0.00769
	9	0.00128	0	0	0.00128	0.00513	0.00385	0.01282	0.01795	0.03077	0.02692
	10	0.00128	0.00128	0.00128	0.00256	0	0.00513	0.00256	0.01538	0.0141	0.05641

Tabelle 9-9: Zweidimensionale Dichte der Männer der Periode 1982 bis 1987,  $D_{\text{mod}}$ 

		Einkommensklasse 1987									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1982	1	0.12404	0.07331	0.01881	0.01145	0.00877	0.00463	0.00404	0.00342	0	0
	2	0.04357	0.05302	0.02721	0.01988	0.00952	0.00167	0.0073	0.00124	0.00289	0.00139
	3	0.01504	0.01476	0.03049	0.01326	0.00085	0.00714	0.00467	0.00066	0.00231	0
	4	0.01258	0.01697	0.03339	0.02168	0.01168	0.01095	0.00717	0.00404	0.00236	0.00342
	5	0.00668	0.01403	0.03075	0.01728	0.01241	0.0189	0.00888	0.0086	0.00627	0.00121
	6	0.00299	0.0009	0.00741	0.00709	0.0142	0.00781	0.00341	0.00241	0.00506	0.00054
	7	0	0.00161	0.0095	0.00116	0.01551	0.02103	0.02142	0.00863	0.00706	0.00097
	8	0.00136	0.00122	0.00144	0.00263	0.00671	0.00796	0.01004	0.01373	0.01145	0.00443
	9	0.00077	0	0	0.0005	0.00191	0.00151	0.0044	0.00521	0.01043	0.00882
	10	0.00028	0.00025	0.00029	0.00036	0	0.00072	0.00032	0.00161	0.00172	0.00665





 Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$

Tabelle 9-10: "Wahrscheinlichste" angepasste zweidimensionale Dichtematrix,  $D_{\text{opt}}$

		Einkommensklasse 1987									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1982	1	0.44872	0.29487	0.0641	0.0641	0.05128	0.02564	0.02564	0.02564	0	0
	2	0.21795	0.29487	0.12821	0.15385	0.07692	0.01282	0.0641	0.01282	0.02564	0.01282
	3	0.14103	0.15385	0.26923	0.19231	0.01282	0.10256	0.07692	0.01282	0.03846	0
	4	0.07692	0.11538	0.19231	0.20513	0.11538	0.10256	0.07692	0.05128	0.02564	0.03846
	5	0.03846	0.08974	0.16667	0.15385	0.11538	0.16667	0.08974	0.10256	0.0641	0.01282
	6	0.03846	0.01282	0.08974	0.14103	0.29487	0.15385	0.07692	0.0641	0.11538	0.01282
	7	0	0.01282	0.0641	0.01282	0.17949	0.23077	0.26923	0.12821	0.08974	0.01282
	8	0.01282	0.01282	0.01282	0.03846	0.10256	0.11538	0.16667	0.26923	0.19231	0.07692
	9	0.01282	0	0	0.01282	0.05128	0.03846	0.12821	0.17949	0.30769	0.26923
	10	0.01282	0.01282	0.01282	0.02564	0	0.05128	0.02564	0.15385	0.14103	0.5641

**Tabelle 9-11:** Übergangsmatrix der Männer zwischen 1982 und 1987,  $P_{\text{mod}}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.78917 (0.01734)

		Einkommensklasse 1987									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1982	1	0.49921	0.29506	0.07571	0.04609	0.03531	0.01861	0.01625	0.01376	0	0
	2	0.25984	0.31619	0.16227	0.11853	0.05675	0.00997	0.04354	0.00737	0.01721	0.00832
	3	0.16868	0.16551	0.34189	0.14865	0.00949	0.08005	0.05242	0.0074	0.02591	0
	4	0.10126	0.13661	0.26875	0.1745	0.09399	0.0881	0.05769	0.03256	0.01901	0.02755
	5	0.05347	0.1122	0.24597	0.13821	0.09926	0.15118	0.07107	0.06876	0.05018	0.0097
	6	0.05775	0.01731	0.14307	0.13685	0.27401	0.15074	0.0658	0.04642	0.09756	0.01048
	7	0	0.01853	0.10937	0.01331	0.1785	0.242	0.24649	0.09937	0.08121	0.01121
	8	0.02224	0.02	0.02361	0.04311	0.11009	0.13059	0.16469	0.22522	0.18783	0.07261
	9	0.023	0	0	0.01487	0.05694	0.04503	0.13105	0.15532	0.31089	0.2629
	10	0.02276	0.02047	0.02417	0.02942	0	0.05942	0.02594	0.13174	0.141	0.54508

 Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{\text{mod}}$

**Tabelle 9-12:** "Wahrscheinlichste" angepasste Übergangsmatrix,  $P_{\text{opt}}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.78784 (0.02774)

9.4.4.2 1977 bis 1982

		Einkommensklasse 1982									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1977	1	0.04474	0.02368	0.01579	0.00395	0.00263	0.00395	0.00263	0	0	0.00263
	2	0.02763	0.02763	0.01447	0.00789	0.00921	0.00263	0.00132	0.00789	0.00132	0
	3	0.01447	0.02368	0.01447	0.01447	0.00658	0.01184	0.00921	0.00263	0	0.00263
	4	0.00526	0.00921	0.02368	0.02105	0.01184	0.00921	0.00658	0.00789	0.00263	0.00263
	5	0.00263	0.00526	0.01447	0.02237	0.02105	0.01184	0.00526	0.00526	0.00658	0.00526
	6	0	0.00789	0.00789	0.01447	0.025	0.01447	0.01579	0.00789	0.00526	0.00132
	7	0	0.00132	0.00526	0.00789	0.01184	0.01711	0.02105	0.02237	0.01053	0.00263
	8	0	0	0.00263	0.00395	0.00395	0.01974	0.01974	0.01316	0.02368	0.01316
	9	0.00263	0.00132	0.00132	0.00132	0.00263	0.00789	0.01053	0.02237	0.02632	0.02368
	10	0.00263	0	0	0.00263	0.00526	0.00132	0.00789	0.01053	0.02368	0.04605

Tabelle 9-13: Zweidimensionale Dichte der Männer der Periode 1977 bis 1982,  $D_{\text{mod}}$ 

		Einkommensklasse 1982									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1977	1	0.15497	0.06863	0.05486	0.01362	0.00694	0.01112	0.00353	0	0	0.00201
	2	0.06181	0.0517	0.03247	0.01758	0.01569	0.00479	0.00114	0.01016	0.00074	0
	3	0.02158	0.02954	0.02164	0.02149	0.00747	0.01435	0.00531	0.00226	0	0.00087
	4	0.00919	0.01346	0.04149	0.03661	0.01575	0.01308	0.00444	0.00793	0.00115	0.00101
	5	0.0028	0.00469	0.01545	0.02371	0.01707	0.01025	0.00217	0.00322	0.00175	0.00124
	6	0	0.00432	0.00518	0.00942	0.01245	0.00769	0.00399	0.00297	0.00086	0.00019
	7	0	0.00047	0.00228	0.00339	0.00389	0.006	0.00351	0.00555	0.00114	0.00025
	8	0	0	0.00125	0.00186	0.00142	0.0076	0.00362	0.00359	0.00281	0.00138
	9	0.00172	0.00072	0.00086	0.00086	0.00131	0.00419	0.00266	0.0084	0.0043	0.00341
	10	0.00087	0	0	0.00087	0.00133	0.00035	0.00101	0.002	0.00196	0.00337



 Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$

Tabelle 9-14: "Wahrscheinlichste" angepasste zweidimensionale Dichtematrix,  $D_{\text{opt}}$

		Einkommensklasse 1982									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1977	1	0.44737	0.23684	0.15789	0.03947	0.02632	0.03947	0.02632	0	0	0.02632
	2	0.27632	0.27632	0.14474	0.07895	0.09211	0.02632	0.01316	0.07895	0.01316	0
	3	0.14474	0.23684	0.14474	0.14474	0.06579	0.11842	0.09211	0.02632	0	0.02632
	4	0.05263	0.09211	0.23684	0.21053	0.11842	0.09211	0.06579	0.07895	0.02632	0.02632
	5	0.02632	0.05263	0.14474	0.22368	0.21053	0.11842	0.05263	0.05263	0.06579	0.05263
	6	0	0.07895	0.07895	0.14474	0.25	0.14474	0.15789	0.07895	0.05263	0.01316
	7	0	0.01316	0.05263	0.07895	0.11842	0.17105	0.21053	0.22368	0.10526	0.02632
	8	0	0	0.02632	0.03947	0.03947	0.19737	0.19737	0.13158	0.23684	0.13158
	9	0.02632	0.01316	0.01316	0.01316	0.02632	0.07895	0.10526	0.22368	0.26316	0.23684
	10	0.02632	0	0	0.02632	0.05263	0.01316	0.07895	0.10526	0.23684	0.46053

**Tabelle 9-15:** Übergangsmatrix der Männer zwischen 1977 und 1982,  $P_{\text{mod}}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.83333 (0.01686)

		Einkommensklasse 1982									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1977	1	0.49091	0.21741	0.17379	0.04313	0.022	0.03521	0.01117	0	0	0.00637
	2	0.31521	0.26369	0.16561	0.08968	0.08004	0.0244	0.0058	0.0518	0.00376	0
	3	0.17331	0.23724	0.17384	0.17259	0.06001	0.11527	0.04265	0.01813	0	0.00696
	4	0.06378	0.09337	0.28788	0.25405	0.10931	0.09073	0.03083	0.05503	0.00798	0.00704
	5	0.03402	0.05691	0.18766	0.28793	0.2073	0.12444	0.02631	0.03913	0.02128	0.01502
	6	0	0.09172	0.10998	0.20018	0.26449	0.16341	0.08481	0.06307	0.01829	0.00403
	7	0	0.01793	0.08599	0.12806	0.14694	0.2265	0.13262	0.20959	0.0429	0.00946
	8	0	0	0.05316	0.07917	0.06056	0.32313	0.15372	0.15243	0.11935	0.05849
	9	0.06045	0.02528	0.03032	0.0301	0.04605	0.14742	0.09351	0.29555	0.15125	0.12008
	10	0.07407	0	0	0.07376	0.11284	0.0301	0.08593	0.17042	0.16679	0.28609

Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{\text{mod}}$

**Tabelle 9-16:** "Wahrscheinlichste" angepasste Übergangsmatrix,  $P_{\text{opt}}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.85827 (0.03145)



## 9.4.4.3 1972 bis 1977

		Einkommensklasse 1977									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1972	1	0.0507	0.02676	0.00845	0.00563	0.00282	0.00141	0.00141	0.00141	0	0.00141
	2	0.02113	0.02254	0.01408	0.01549	0.01268	0.00704	0.00423	0.00141	0	0.00141
	3	0.01127	0.02113	0.02676	0.01127	0.00423	0.00845	0.00704	0.00423	0.00423	0.00141
	4	0.00423	0.00704	0.01831	0.02113	0.01549	0.00845	0.01408	0.00845	0.00282	0
	5	0.00282	0.01408	0.01268	0.01549	0.01127	0.02254	0.00986	0.00282	0.00704	0.00141
	6	0.00141	0.00704	0.00845	0.01408	0.01972	0.01549	0.01268	0.01127	0.00704	0.00282
	7	0.00141	0.00141	0.00423	0.00563	0.0169	0.0169	0.02676	0.01549	0.00845	0.00282
	8	0.00423	0	0.00141	0.00423	0.01127	0.00563	0.01549	0.03099	0.0169	0.00986
	9	0.00282	0	0.00423	0.00563	0.00563	0.01127	0.00845	0.00986	0.0338	0.01831
	10	0	0	0.00141	0.00141	0	0.00282	0	0.01408	0.01972	0.06056

Tabelle 9-17: Zweidimensionale Dichte der Männer der Periode 1972 bis 1977,  $D_{\text{mod}}$ 

		Einkommensklasse 1977									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1972	1	0.14325	0.08467	0.02471	0.01379	0.00983	0.0023	0.0024	0.00207	0	0.00092
	2	0.04772	0.05701	0.03292	0.03033	0.03535	0.00919	0.00577	0.00166	0	0.00074
	3	0.02095	0.04399	0.05149	0.01816	0.0097	0.00907	0.00791	0.00409	0.00533	0.00061
	4	0.00562	0.01049	0.0252	0.02435	0.02544	0.00649	0.01132	0.00585	0.00254	0
	5	0.00195	0.01094	0.00909	0.00931	0.00964	0.00902	0.00413	0.00102	0.00331	0.00023
	6	0.00119	0.00664	0.00736	0.01028	0.0205	0.00753	0.00645	0.00494	0.00402	0.00055
	7	0.00068	0.00076	0.00211	0.00236	0.01008	0.00471	0.00781	0.00389	0.00277	0.00032
	8	0.00198	0	0.00068	0.00172	0.00653	0.00153	0.00439	0.00757	0.00538	0.00107
	9	0.00041	0	0.00064	0.00072	0.00102	0.00096	0.00075	0.00075	0.00337	0.00063
	10	0	0	0.00012	9.6E-05	0	0.00013	0	0.00058	0.00106	0.00111





 Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$

Tabelle 9-18: "Wahrscheinlichste" angepasste zweidimensionale Dichtematrix,  $D_{\text{opt}}$

		Einkommensklasse 1977									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1972	1	0.50704	0.26761	0.08451	0.05634	0.02817	0.01408	0.01408	0.01408	0	0.01408
	2	0.21127	0.22535	0.14085	0.15493	0.12676	0.07042	0.04225	0.01408	0	0.01408
	3	0.11268	0.21127	0.26761	0.11268	0.04225	0.08451	0.07042	0.04225	0.04225	0.01408
	4	0.04225	0.07042	0.1831	0.21127	0.15493	0.08451	0.14085	0.08451	0.02817	0
	5	0.02817	0.14085	0.12676	0.15493	0.11268	0.22535	0.09859	0.02817	0.07042	0.01408
	6	0.01408	0.07042	0.08451	0.14085	0.19718	0.15493	0.12676	0.11268	0.07042	0.02817
	7	0.01408	0.01408	0.04225	0.05634	0.16901	0.16901	0.26761	0.15493	0.08451	0.02817
	8	0.04225	0	0.01408	0.04225	0.11268	0.05634	0.15493	0.30986	0.16901	0.09859
	9	0.02817	0	0.04225	0.05634	0.05634	0.11268	0.08451	0.09859	0.33803	0.1831
	10	0	0	0.01408	0.01408	0	0.02817	0	0.14085	0.19718	0.60563

**Tabelle 9-19:** Übergangsmatrix der Männer zwischen 1972 und 1977,  $P_{mod}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.77778 (0.01813)

		Einkommensklasse 1977									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1972	1	0.50451	0.2982	0.08701	0.04858	0.0346	0.00809	0.00847	0.00729	0	0.00325
	2	0.21625	0.25834	0.14918	0.13744	0.16019	0.04162	0.02613	0.0075	0	0.00335
	3	0.12231	0.25683	0.30058	0.106	0.05662	0.05297	0.04618	0.02386	0.0311	0.00355
	4	0.04791	0.08943	0.21483	0.20762	0.21689	0.05533	0.09648	0.04985	0.02166	0
	5	0.0333	0.18649	0.15508	0.15875	0.16447	0.15384	0.07042	0.01733	0.05646	0.00386
	6	0.01708	0.09562	0.10601	0.14798	0.29513	0.10846	0.09284	0.07107	0.0579	0.00793
	7	0.01917	0.02147	0.0595	0.06645	0.28398	0.13282	0.22002	0.1097	0.07799	0.0089
	8	0.06428	0	0.02217	0.05571	0.21161	0.04949	0.14237	0.24523	0.17435	0.03481
	9	0.04476	0	0.06947	0.07758	0.11051	0.10337	0.08111	0.0815	0.3642	0.06752
	10	0	0	0.03731	0.03125	0	0.04164	0	0.1876	0.34233	0.35986

 Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{mod}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{mod}$

**Tabelle 9-20:** "Wahrscheinlichste" angepasste Übergangsmatrix,  $P_{opt}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.80742 (0.06722)

9.4.4.4 1967 bis 1972

		Einkommensklasse 1972									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1967	1	0.03684	0.02105	0.01228	0.01404	0.00175	0.00175	0.00351	0.00351	0.00351	0.00175
	2	0.02807	0.02807	0.01404	0.00877	0.00877	0.00351	0.00526	0	0.00175	0.00175
	3	0.01754	0.01404	0.0193	0.0193	0.00877	0.01404	0.00351	0.00175	0.00175	0
	4	0.01053	0.01579	0.0193	0.01754	0.01404	0.01228	0.00351	0.00351	0.00351	0
	5	0.00351	0.01053	0.00877	0.00877	0.01754	0.01579	0.00702	0.00526	0.01228	0.01053
	6	0.00175	0.00351	0.00175	0.01053	0.01228	0.01754	0.02456	0.00702	0.00702	0.01404
	7	0.00175	0.00526	0.01053	0.00702	0.01404	0.01404	0.01579	0.01754	0.00702	0.00702
	8	0	0.00175	0.01228	0.00702	0.01754	0.00877	0.01579	0.01228	0.01228	0.01228
	9	0	0	0	0.00702	0.00175	0.00526	0.0193	0.02807	0.02456	0.01404
	10	0	0	0.00175	0	0.00351	0.00702	0.00175	0.02105	0.02632	0.0386

Tabelle 9-21: Zweidimensionale Dichte der Männer der Periode 1967 bis 1972,  $D_{\text{mod}}$ 

		Einkommensklasse 1972									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1967	1	0.12479	0.06475	0.02939	0.03561	0.00265	0.00192	0.00543	0.00372	0.00217	0.0008
	2	0.04919	0.04466	0.01738	0.01152	0.00686	0.00199	0.00422	0	0.00056	0.00041
	3	0.02746	0.01995	0.02134	0.02263	0.00613	0.0071	0.00251	0.00086	0.0005	0
	4	0.0217	0.02955	0.0281	0.02709	0.01292	0.00818	0.00331	0.00226	0.00132	0
	5	0.00735	0.02002	0.01298	0.01377	0.01641	0.01069	0.00672	0.00345	0.00469	0.00297
	6	0.00297	0.00539	0.0021	0.01334	0.00928	0.0096	0.019	0.00372	0.00216	0.0032
	7	0.00239	0.00652	0.01014	0.00717	0.00855	0.00619	0.00984	0.00749	0.00174	0.00129
	8	0	0.00256	0.01392	0.00844	0.01257	0.00455	0.01158	0.00617	0.00359	0.00265
	9	0	0	0	0.0043	0.00064	0.00139	0.00722	0.00718	0.00366	0.00155
	10	0	0	0.00143	0	0.00181	0.00262	0.00093	0.00761	0.00554	0.006


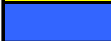
Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $D_{\text{mod}}$

Tabelle 9-22: "Wahrscheinlichste" angepasste zweidimensionale Dichtematrix,  $D_{\text{opt}}$

		Einkommensklasse 1972									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1967	1	0.36842	0.21053	0.12281	0.14035	0.01754	0.01754	0.03509	0.03509	0.03509	0.01754
	2	0.2807	0.2807	0.14035	0.08772	0.08772	0.03509	0.05263	0	0.01754	0.01754
	3	0.17544	0.14035	0.19298	0.19298	0.08772	0.14035	0.03509	0.01754	0.01754	0
	4	0.10526	0.15789	0.19298	0.17544	0.14035	0.12281	0.03509	0.03509	0.03509	0
	5	0.03509	0.10526	0.08772	0.08772	0.17544	0.15789	0.07018	0.05263	0.12281	0.10526
	6	0.01754	0.03509	0.01754	0.10526	0.12281	0.17544	0.24561	0.07018	0.07018	0.14035
	7	0.01754	0.05263	0.10526	0.07018	0.14035	0.14035	0.15789	0.17544	0.07018	0.07018
	8	0	0.01754	0.12281	0.07018	0.17544	0.08772	0.15789	0.12281	0.12281	0.12281
	9	0	0	0	0.07018	0.01754	0.05263	0.19298	0.2807	0.24561	0.14035
	10	0	0	0.01754	0	0.03509	0.07018	0.01754	0.21053	0.26316	0.38596

**Tabelle 9-23:** Übergangsmatrix der Männer zwischen 1967 und 1972,  $P_{\text{mod}}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.85770 (0.01912)

		Einkommensklasse 1972									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einkommensklasse 1967	1	0.46008	0.23871	0.10835	0.1313	0.00978	0.00708	0.02003	0.01371	0.00799	0.00295
	2	0.3596	0.32651	0.12703	0.08419	0.05018	0.01453	0.03082	0	0.0041	0.00303
	3	0.25313	0.18387	0.19673	0.2086	0.05652	0.06548	0.02314	0.00792	0.00461	0
	4	0.1614	0.21982	0.20906	0.20152	0.0961	0.06088	0.02459	0.01683	0.00981	0
	5	0.0742	0.20213	0.13107	0.13897	0.16568	0.10797	0.06784	0.03483	0.04735	0.02997
	6	0.04196	0.07619	0.02964	0.18859	0.13115	0.13566	0.26852	0.05251	0.0306	0.04518
	7	0.03902	0.10628	0.1654	0.11692	0.13939	0.10093	0.16052	0.12208	0.02845	0.02101
	8	0	0.03871	0.21086	0.12776	0.19038	0.06893	0.17541	0.09338	0.05441	0.04017
	9	0	0	0	0.16577	0.0247	0.05366	0.27817	0.27694	0.14119	0.05957
	10	0	0	0.05519	0	0.06977	0.10104	0.03571	0.29332	0.21362	0.23135

 Werte oberhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{\text{mod}}$   
 Werte unterhalb des 95%-Konfidenzintervalls von  $P_{\text{mod}}$

**Tabelle 9-24:** "Wahrscheinlichste" angepasste Übergangsmatrix,  $P_{\text{opt}}$ . Prais' Mobilitätsindex und seine Standardabweichung: 0.87637 (0.03679)

## 10 GLOSSAR

### 10.1 BEZEICHNUNGEN

$K$	Anzahl Einkommensklassen, in welche die betrachteten Einkommen eingeteilt werden.
$N$	Anzahl Individuen der Grundgesamtheit.
$n$	Anzahl Individuen einer Stichprobe.
$m_t$	Wahre Einkommensverteilung respektive Einkommensverteilung der Grundgesamtheit zum Zeitpunkt $t$ ( $(K \times 1)$ -Vektor).
$\mu_t$	Einkommensverteilung einer Stichprobe respektive willkürlich gewählte Einkommensverteilung zum Zeitpunkt $t$ ( $(K \times 1)$ -Vektor).
$\pi$	Gleichgewichtige Einkommensverteilung ( $(K \times 1)$ -Vektor).
$\mathbf{1}$	$(K \times 1)$ -Vektor mit lauter Elementen 1.
$\text{diag}(\cdot)$	Der $\text{diag}(\cdot)$ -Operator verwandelt jeden $(K \times 1)$ -Vektor in eine $(K \times K)$ -Diagonalmatrix mit den Elementen des Vektors als Hauptdiagonalelemente.
$P$	$(K \times K)$ -Übergangsmatrix (auch Transitionsmatrix, Übergangsdynamik, stochastische Matrix). Enthält die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Individuum zum Zeitpunkt $t+1$ in Einkommensklasse $j$ sein wird wenn es zum Zeitpunkt $t$ in Klasse $i$ war ( $i, j \in \{1, \dots, K\}$ ).
$P_{\text{mod}}$	Hypothetische $(K \times K)$ -Übergangsmatrix.
$P_{\text{opt}}$	An die beobachteten wahren Einkommensverteilungen zu zwei Zeitpunkten optimal angepasste $(K \times K)$ -Übergangsmatrix.
$P_{\text{wahr}}$	Wahre $(K \times K)$ -Übergangsmatrix. Ist normalerweise unbekannt und soll geschätzt werden.
$D$	Zweidimensionale $(K \times K)$ -Dichtematrix. Enthält die unbedingten Wahrscheinlichkeiten, dass ein Individuum zum Zeitpunkt $t$ in Einkommensklasse $i$ und zum Zeitpunkt $t+1$ in Klasse $j$ sein wird ( $i, j \in \{1, \dots, K\}$ ).

- $D_{\text{mod}}$  Hypothetische zweidimensionale ( $K \times K$ )-Dichtematrix.
- $D_{\text{opt}}$  An die beobachteten wahren Einkommensverteilungen zu zwei Zeitpunkten optimal angepasste, zweidimensionale ( $K \times K$ )-Dichtematrix.
- $D_{\text{wahr}}$  Wahre zweidimensionale ( $K \times K$ )-Dichtematrix. Ist normalerweise unbekannt und soll geschätzt werden.
- $\Gamma$  ( $K \times K$ )-Einkommensgeschichtematrix (Kontingenztafel). Pendant zur zweidimensionalen ( $K \times K$ )-Dichtematrix, enthält jedoch anstelle der Wahrscheinlichkeiten die absoluten Häufigkeiten. Falls  $D$  und  $\Gamma$  die Grundgesamtheit widerspiegeln gilt:  $\Gamma = N \cdot D$ .
- $\bar{D}$  Konvexe Menge aller zweidimensionalen Dichtematrizen  $D$  mit Randverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$ . Die unbekannte wahre zweidimensionale Dichte  $D_{\text{wahr}}$  ist Element dieser Menge.
- $\bar{D}_{\text{mod}}(P_{\text{mod}})$  Konvexe Menge aller hypothetischen Dichtematrizen  $D_{\text{mod}}$ , welche aus der Modelldynamik  $P_{\text{mod}}$  mit allen potentiellen Anfangsverteilungen  $\mu_t \gg 0$  gemäss  $D_{\text{mod}} = \text{diag}(\mu_t) \cdot P_{\text{mod}}$  gebildet werden können.
- $F$  Mobilitätsfunktional ( $(K \times K)$ -Matrix). Bewertet Bewegungen zwischen Einkommensklassen mit positiven Gewichten, das Verharren in der angestammten Klasse erhält hingegen das Gewicht 0.
- $S_T$  Empirische Mobilität bis zum Zeitpunkt  $T$  entlang eines betrachteten Einkommenspfades.  $S_T$  entspricht dem zeitlichen Mittel aller durch das gewählte Mobilitätsfunktional  $F$  gewichteten Bewegungen zwischen den Einkommensklassen entlang des betrachteten Einkommenspfades.
- $S_n$  Empirische Stichprobenmobilität. Durch das gewählte Mobilitätsfunktional  $F$  gewichtete durchschnittliche Einkommensklassenwechsel innerhalb eines Stichprobenpanels.
- $M_F^e(P)$  Gleichgewichts-Mobilitätsindex der Übergangsmatrix  $P$  zum Mobilitätsfunktional  $F$ . Die empirische Mobilität  $S_T$  konvergiert für  $T \rightarrow \infty$  gegen diesen Wert.

$M_F^p(P \alpha)$	Periodenmobilitätsindex der Übergangsmatrix $P$ zum Mobilitätsfunktional $F$ , gemessen bei einer Abweichung der empirischen Mobilität oberhalb respektive unterhalb eines vorgegebenen Schwellenwerts $\alpha$ . Entspricht der asymptotischen Wahrscheinlichkeit, dass die empirische Mobilität den Schwellenwert $\alpha$ auch in Periode $T+1$ noch über- respektive unterschreitet, gegeben dies ist in Periode $T$ der Fall.
$\alpha$	Schwellenwert für die Messung der Wahrscheinlichkeit von Abweichungen der empirischen Mobilität oberhalb $\alpha \in (M_F^e(P), \alpha_{\max}(P))$ respektive unterhalb $\alpha \in (0, M_F^e(P))$ .
$\alpha_{\max}(P)$	Maximal erreichbare empirische Mobilität für die Übergangsdynamik $P$ und ein bestimmtes Mobilitätsfunktional $F$ .
$\alpha_{\max}^*$	Maximal möglicher Wert, den $\alpha_{\max}(P)$ annehmen kann. Dieser Wert ist nur vom gewählten Mobilitätsfunktional $F$ abhängig. Für alle positiven Übergangsmatrizen $P$ derselben Dimension stimmt $\alpha_{\max}(P)$ mit $\alpha_{\max}^*$ überein. Für alle anderen Übergangsmatrizen $Q$ kann $\alpha_{\max}(Q)$ kleiner als $\alpha_{\max}^*$ sein.
$\bar{x}$	Mittelwert der Zufallsvariablen $X$ .
$s_x$	Standardabweichung der Zufallsvariablen $X$ .
$s_{\bar{x}}$	Standardabweichung des Mittelwerts $\bar{x}$ der Zufallsvariablen $X$ .

## 10.2 KONVENTIONEN

Für zwei Matrizen  $A$  und  $B$  gelten die folgenden Konventionen:

$A \geq B$  falls  $a_{ij} \geq b_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, K\}$ .

$A > B$  falls  $A \geq B$  und  $A \neq B$ .

$A \gg B$  falls  $a_{ij} > b_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, K\}$ .

### 10.3 ABKÜRZUNGEN

- IPFP** Iterativ proportional fitting procedure. Die iterativ proportionale Anpassungsprozedur wird für die Bestimmung der optimal an die beobachteten Einkommensverteilungen  $m_t$  und  $m_{t+1}$  angepassten zweidimensionalen Dichtematrix  $D_{opt}$  verwendet.
- PSID** Panel study of income dynamics. Panelstudie, die seit 1968 jährlich in den USA erhoben wird. Unter anderem enthält sie die Einkommensdaten der befragten Individuen seit 1967.
- CPS** Current population survey. Wird seit mehr als 50 Jahren monatlich aus Befragungen von 50'000 Haushalten erhoben. Dabei werden unter anderem die Einkommensdaten aller Familienmitglieder ab dem Alter 15 erfasst. Die Haushalte werden so ausgesucht, dass sie die Bevölkerung der USA repräsentieren. Es handelt sich um ein rotierendes Panel, wobei die Haushalte insgesamt bloss 8 Monate im Panel verbleiben. Für längere Betrachtungshorizonte können die CPS-Daten bloss als Querschnittsdaten verwendet werden.



## 11 REFERENZEN

- Adelman, I., S. Morley, C. Schenzler und M. Warning. 1994. Estimating Income Mobility from Census Data. *Journal of Policy Modeling* 16:187-213.
- Aebi, R. 1997. Contingency Tables with Prescribed Marginals. *Statistical Papers* 38:219-229.
- Aebi, R. 1996. Schrödinger's Time-Reversal of Natural Laws. *The Mathematical Intelligencer* 18:62-67.
- Aebi, R. und M. Nagasawa. 1992. Large Deviations and the propagation of Chaos for Schrödinger Processes. *Probability Theory and Related Fields* 94:53-68.
- Aebi, R., K. Neusser und P. Steiner. 2002 a. Improving Models of Income Dynamics using Cross-Section Information. University of Berne, Mimeo.
- Aebi, R., K. Neusser und P. Steiner. 2002 b. A Large Deviation Approach to the Measurement of Mobility. University of Berne, Mimeo.
- Aebi, R., K. Neusser und P. Steiner. 1999. Evaluating Theories of Income Dynamics: A Probabilistic Approach. University of Berne, Working Paper 99-5.
- Alvarez, J., M. Browning und M. Ejrnaes. 2001. Modelling Income Processes with Lots of Heterogeneity. Paper presented at ESEM 2001 in Lausanne, Switzerland.
- Anderson, T.W. und D.A. Darling. 1954. A Test of Goodness of Fit. *Journal of the American Statistical Association* 49:765-769.
- Atkinson, A.B. 1997. Bringing Income Distribution in from the Cold. *Economic Journal* 107:297-321.
- Atkinson, A.B. 1970. On the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory* 2:244-263.
- Barro, R.J. und X. Sala-i-Martin. 1992. Convergence. *Journal of Political Economy* 100:223-251.
- Bartholomew, D.J. 1982. Stochastic Models for Social Processes. 3<sup>rd</sup> ed. Chichester: John Wiley & Son.

- Beardah, C.C. MATLAB Toolbox for Density Estimation. Datei kdtlbox.zip von der Internetseite <http://science.ntu.ac.uk/msor/ccb/densest.html>.
- Berman, A. und R.J. Plemmons. [1979] 1994. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, Classics in Applied Mathematics.
- Billingsley, P. 1986. Probability and Measure. 2<sup>nd</sup> Ed. New York: John Wiley & Sons.
- Billingsley, P. 1961. Statistical Inference for Markov Processes. Chicago: University of Chicago Press.
- Boyarsky, A. und Pawel Góra. 1997. Laws of Chaos. Boston, Massachusetts: Birkhäuser.
- Bucklew, J.A. 1990. Large Deviation Techniques in Decision, Simulation, and Estimation. New York: Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- Burkhauser, R.V., A.C. Cutts, M.C. Daly und S.P. Jenkins. 1999. Testing the Significance of Income Distribution Changes over the 1980s Business Cycle: A Cross-National Comparison. *Journal of Applied Econometrics* 14:253-272.
- Champernowne, D.G. 1953. A Model of Income Distribution. *Economic Journal* 63:318-351.
- Conlisk, J. 1990. Monotone Mobility Matrices. *Journal of Mathematical Sociology* 15:173-191.
- Csiszár, I. 1975. I-Divergence Geometry of Probability Distributions and Minimization Problems. *The Annals of Probability* 3:146-158.
- Dardanoni, V. 1995. Income Distribution Dynamics: Monotone Markov Chains Make Light Work. *Social Choice and Welfare* 12:181-192.
- Dardanoni, V. 1993. Measuring Social Mobility. *Journal of Economic Theory* 61: 372-394 (1993).
- Davidson, R. und J.G. MacKinnon. 1993. Estimation and Inference in Econometrics. New York: Oxford University Press.
- Dembo, A. und O. Zeitouni. 1998. Large Deviations Techniques and Applications. 2<sup>nd</sup> Ed. New York: Springer-Verlag.

- Deming, W.E. und F.F. Stephan. 1940. On a Least Squares Adjustment of a Sampled Frequency Table when the Expected Marginal Totals are Known. *Annals of Mathematical Statistics* 11: 427-444.
- Deuschel, J.-D. und D. Stroock. 1989. Large Deviations. New York: Academic Press.
- Dieudonné, J. 1960. Foundations of Modern Analysis. New York: Academic Press.
- Dublin Institute for Advanced Studies. The Basic Ideas Underlying Large Deviations Illustrated with a Coin Tossing Experiment, [http://www.stp.dias.ie/APG/coin\\_tossing.html](http://www.stp.dias.ie/APG/coin_tossing.html) respektive [.../rate\\_function.html](http://www.stp.dias.ie/APG/rate_function.html) (Netscape-Browser benutzen).
- Durlauf, S.N. und D.T. Quah. 1998. The New Empirics of Economic Growth. In *Handbook of Macroeconomics*, eds. J.B. Taylor and M. Woodford. Forthcoming.
- Ellis, R.S. 1985. Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics. New York: Springer-Verlag.
- Fields, G.S. und E.A. Ok. 1999. The Measurement of Income Mobility: An Introduction to the Literature. In *Handbook on Income Inequality Measurement*, ed. J. Silber, 557-96. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Föllmer, H. 1988. Random Fields and Diffusion Processes. École d'Été de Saint Flour XV-XVII. Lecture Notes in Mathematics 1362. New York: Springer-Verlag.
- Geweke, J., R.C. Marshall und G.A. Zarkin. 1986. Mobility Indices in Continuous Time Markov Chains. *Econometrica* 54: 1407-1423.
- Golan, A., G. Judge und D. Miller. 1996. Maximum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data. Chichester: John Wiley & Sons.
- Gottschalk, P. 1997. Inequality, Income Growth, and Mobility: The Basic Facts. *Journal of Economic Perspectives* 11: 21-40.
- Haberman, S.J. 1984. Adjustment by Minimum Discriminant Information. *Annals of Statistics* 12: 971-988.
- Ireland, C.T. und S. Kullback. 1968. Contingency Tables with given Marginals. *Biometrika* 55: 179-188.

- Iscoe, I., P. Ney und E. Nummelin. 1985. Large Deviations of Uniformly Recurrent Markov Additive Processes. *Advances in Applied Mathematics* 6: 373-412.
- Jenkins, S.P. 1991. The Measurement of Income Inequality. In *Economic Inequality and Poverty: International Perspectives*, ed. L. Osberg, 3-38. Armonk (N.Y.): M.E. Sharpe.
- Kalbfleisch, J.D. und J.F. Lawless. 1984. Least-Squares Estimation of Transition Probabilities from Aggregate Data. *Canadian Journal of Statistics* 12: 169-182.
- Kim, G.-H. und H.T. David. 1979. Large Deviations of Functions of Markovian Transitions and Mathematical Programming Duality. *Annals of Probability* 7: 874-881.
- Kitamura, Y. und M. Stutzer. 1997. An Information-Theoretic Alternative to Generalized Method of Moments Estimation. *Econometrica* 65: 861-874.
- Kullback, S. 1959. *Information Theory and Statistics*. New York: John Wiley.
- Lancaster, P. und M. Tismenetsky. 1985. *The Theory of Matrices*. 2<sup>nd</sup> Ed. Academic Press, Orlando.
- Lanford, O.E. 1973. Entropy and Equilibrium States in Classical Statistical Mechanics. *Lecture Notes in Physics* 20: 1-113. Springer-Verlag, Berlin.
- Lee, T.C., G.C. Judge und A. Zellner. 1970. Estimating the Parameters of the Markov Model from Aggregate Time Series Data. Amsterdam: North-Holland.
- Maasoumi, E. 1998. On Mobility. In *Handbook of Applied Economic Statistics*, eds. A. Ullah und D. Giles, 119-173. New York: Marcel Dekker.
- Magnus, J.R. und H. Neudecker. 1988. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Miller, H.D. 1961. A Convexity Property in the Theory of Random Variables defined on a Finite Markov Chain. *Annales of Mathematical Statistics* 32: 1260-1270.
- Nelsen, R.B. 1999. *An Introduction to Copulas*. Lecture Notes in Statistics 139. New York: Springer Verlag.
- Ney, P. und E. Nummelin. 1987a. Markov Additive Processes I. Eigenvalue Properties and Limit Theorems. *Annals of Statistics* 15: 561-592.

- Ney, P. und E. Nummelin. 1987b. Markov Additive Processes II. Large Deviations. *Annals of Statistics* 15: 593-609.
- Norris, J.R. 1997. Markov Chains. Cambridge: Cambridge University Press.
- Prais, S.J. 1955. Measuring Social Mobility. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A, Part I*, 188: 56-66.
- Quah, D.T. 1996. Convergence Empirics Across Economies with (Some) Capital Mobility. *Journal of Economic Growth* 1: 95-124.
- Rockafellar, R.T. 1970. Convex Analysis. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Rosenblatt, M. 1974. Random Processes. New York: Springer Graduate Texts in Mathematics.
- Schlüter, C. 1998. Statistical Inference with Mobility Indices. *Economics Letters* 59: 157-162.
- Schrödinger, E. 1931. Über die Umkehrung der Naturgesetze. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse*: 144-153.
- Seneta, E. 1981. Non-negative Matrices and Markov Chains. New York: Springer Series in Statistics.
- Shapiro, S.S. und R.S. Francia. 1972. An Approximate Analysis of Variance Test for Normality. *Journal of the American Statistical Association* 67: 215-216.
- Shorrocks, A.F. 1978. The Measurement of Mobility. *Econometrica* 46/5: 1013-1024.
- Silverman, B.W. 1986. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. London: Chapman & Hall.
- Sinkhorn, R. 1967. Diagonal Equivalence to Matrices with Prescribed Row and Column Sums. *The American Mathematical Monthly* 74: 402-405.
- Sinkhorn, R. 1964. A Relationship between Arbitrary Positive Matrices and Doubly Stochastic Matrices. *The Annals of Mathematical Statistics* 35: 876-879.

- Smith, J.H. 1947. Estimation of Linear Functions of Cell Proportions. *Annals of Mathematical Statistics* 13: 166-178.
- Sommers, P.M. und J. Conlisk. 1979. Eigenvalue Immobility Measures for Markov Chains. *Journal of Mathematical Sociology* 6: 253-276.
- Stahel, W.A. 1995. Statistische Datenanalyse, eine Einführung für Naturwissenschaftler, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
- Stephens, M.A. 1986 a. Tests Based on EDF Statistics. In *Goodness-of-Fit Techniques*, eds. R.B. D'Agostino und M.A. Stephens, 97-193. New York: Marcel Dekker.
- Stephens, M.A. 1986 b. Tests Based on Regression and Correlation. In *Goodness-of-Fit Techniques*, eds. R.B. D'Agostino und M.A. Stephens, 195-233. New York: Marcel Dekker.
- Tauchen, G. 1986. Finite State Markov-Chain Approximations to Univariate and Vector Autoregressions. *Economics Letters* 20: 177-181.
- Trede, M. 1999. Statistical Inference in Mobility Measurement: Sex Differences in Earnings Mobility. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* 218(3-4): 473-490.
- Wagner, M. 1978. On Comparisons of Distribution Processes. In *Personal Income Distribution*, eds. W. Krelle and A.F. Shorrocks, 141-58. Amsterdam: North-Holland.
- White, H. 1994. Estimation, Inference and Specification Analysis. Cambridge: Cambridge University Press.
- White, H. 1982. Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models. *Econometrica* 50: 1-25.
- Wikipedia. The free Encyclopedia. [http://www.wikipedia.org/wiki/Big\\_O\\_notation](http://www.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation).
- Zhulenev, S.V. 1999. On Large Deviations, *SIAM Theory of Probability and Its Applications* 44(1): 75-92.